

Alkalmazott algebra – Előadásvázlat

2010. október 21-ei verzió

Tartalomjegyzék

1. Alapok	1
1.1. Testek	1
1.1.1. Definíció	1
1.1.2. Példák	1
1.1.3. Polinomok	1
1.2. Vektorterek	2
1.2.1. Definíció, példák	2
1.2.2. Alterek, bázis, dimenzió	2
1.3. Lineáris leképezések	4
1.3.1. Definíció, példák	4
1.3.2. Képtér, magtér, dimenziótétel	5
1.3.3. Alkalmazás: a Shamir-féle titokmegosztási rendszer	6
1.3.4. Lineáris leképezések kompozíciója	6
1.4. Mátrixok	6
1.4.1. Definíció, formális műveletek	6
1.4.2. Lineáris leképezések mátrixa	8
1.4.3. Műveletek transzformációkkal és mátrixokkal	8
1.4.4. Báziscsere	9
1.5. Determináns	10
1.5.1. Mátrixok determinánisa, példák	10
1.5.2. Oszlop és sor szerinti kifejtés	11
1.5.3. Elemi tulajdonságok:	11
1.5.4. Szorzat determinánisa	12
1.5.5. Inverz mátrix előjeles aldeterminánsokkal	12
1.5.6. Lineáris transzformációk determinánisa	13
1.6. Lineáris egyenletrendszerek	13
1.6.1. Definíció	13
1.6.2. Megoldás Gauss-eliminációval	13
1.6.3. A Cramer-szabály	14
1.7. A Gauss-elimináció további alkalmazásai	15
1.7.1. Mátrix rangja:	15
1.7.2. Rang és determináns kiszámítása Gauss-eliminációval	15
1.8. Sajátértékek, sajátvektorok, sajátalterek	15
1.8.1. Definíció	15
1.8.2. Sajátalterek együttesen	15
1.8.3. Karakterisztikus polinom	16
1.8.4. Spektrálfelbontás spec. esetben	17
1.9. A Jordan-féle normálalak	18
1.9.1. Invariáns altér	18
1.9.2. Direkt összeg, komplementer altér	18
1.9.3. Nilpotens transzformációk	18
1.9.4. Általánosított sajátvektor, sajátaltér	19
1.9.5. Jordan-bázis	20

1.10. Euklideszi terek	21
1.10.1. Szimmetrikus bilineáris függvények:	21
1.10.2. Euklideszi terek	23
1.10.3. Komplex euklideszi terek	25
1.10.4. Normális mátrixok	27
1.10.5. Projekciók	31
2. Szinguláris értékek szerinti felbontás	33
2.1. Mögöttes szemantikájú indexelés és alacsony rangú közelítés	33
2.2. Szinguláris értékek	33
2.3. SVD	34
2.3.1. A fő lemma	34
2.3.2. Redukált SVD	34
2.3.3. Teljes SVD	34
2.3.4. Egyértelműség kérdése	34
2.3.5. Példa	35
2.3.6. SVD önadjungált mátrixokra	35
2.4. Kapcsolat a poláris felbontással	35
2.4.1. Négyzetgyök	35
2.4.2. Poláris felbontás	36
2.5. Alacsony rangú közelítések	36
2.5.1. Mátrixok Frobenius-normája	36
2.5.2. Az Eckart-Young-tétel	36
2.5.3. LSI alapú keresés	37
2.6. A QR-felbontás	37
2.6.1. Gram-Schmidt ortogonalizációval	37
2.6.2. Householder-tükrözésekkel	37
2.7. Az SVD közelítő kiszámításáról	39
2.8. Az SVD néhány további alkalmazása	39
2.8.1. Homogén lineáris egyenletrendszer megoldása	39
2.8.2. Pseudoinverz	40
2.8.3. Legkisebb négyzetek	41
2.8.4. Képvektorhossz-minimalizálás ("total least squares")	42
3. Nemnegatív mátrixok	43
3.1. Jelölések:	43
3.2. Elemi észrevételek	43
3.3. Spektrálsugár	43
3.3.1. A két definíció egyenértékűsége	43
3.3.2. Alsó és felső korlátok	44
3.4. Pozitív mátrixok – Perron elmélete	45
3.5. Irreducibilis mátrixok – Frobenius elmélete	46
3.6. Konvergencia primitív mátrixokra	47
3.7. Imprimitív irreducibilis mátrixok	49
3.8. Sztochasztikus mátrixok és Markov-láncok	50
3.8.1. Markov-láncok	50
3.8.2. Sztochasztikus mátrixok elemi tulajdonságai	50
3.8.3. Irreducibilitás értelmezése:	50
3.8.4. Imprimitivitás értelmezése:	50
3.8.5. Konvergenciatétel értelmezése:	50

3.9. Duplán sztochasztikus mátrixok	50
3.10. Pagerank	51
3.11. Gyűjtőlapok és tekintélyek	51
4. Egyebek	52
4.1. Hadamard-kódok	52