Bevezetés a számításelméletbe II.
2. (emelt) gyakorlat 2002. február 28.

1. Legyen G egy egyszerű, összefüggő, páros gráf, amelynek mindkét pontosztályában n pont van. Az egyik osztályban minden pont foka különböző. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás!

   Legyen a páros gráf két csoportja A és B. Mindkét csoport elemeinek fokszáma 1-től n-ig van (mert a fokszámok különbözőek, és öf. a gráf), ezért teljesül, hogy(*) $|A| = |B|$ továbbá $\forall X \subseteq G$ -re teljesül, hogy $|N(X)| \geq |X|$.

2. Mutasd meg, hogy r-reguláris páros gráfnak mindig van teljes párosítása. (A G gráf r-reguláris, ha minden pont foka r.)

   Mivel a gráf r-reguláris és páros, teljesül rá (*).

3. Egy páros gráf minden csúcsába pontosan r él fut. Véletlenül éppen r darab különböző színű ceruzánk van (a feketén kívül, amivel az eredeti ábra készült). Bizonyítsuk be, hogy az élek kihúzhatók színessel úgy, hogy minden csúcsba csupa különböző színű menjen.

   Az előző feladat a lapján létezik teljes párosítás. Veszünk egy teljes párosítást, azt kiszínezzük az egyik színnel, majd a kiszínezett éleket figyelmen kívül hagyva veszünk egy másik teljes párosítást, amit egy másik színnel színezünk ki, majd így tovább amíg van élünk. Mivel a gráf r-reguláris r szín kellett így a színezéshez.

4. Legyen G egyszerű, páros gráfban a maximális fokszám k. Bizonyítsuk be, hogy van olyan párosítás G-ben, amely lefedi az összes k fokú pontot!

   Egészítsük ki a gráfot k reguláissá (ha kevés a pont, akkor hozzáveszünk párat). Veszünk egy teljes párosítást (ez létezik, az előző feladatokban beláttuk), ami természetesen lefedi az összes k fokú pontot az eredeti gráfban. Végül elhagyjuk a hozzávett éleket, és megkapjuk a keresett párosítást.

5. Bizonyítsuk be, hogy minden e élű gráfnak van olyan páros részgráfja, ami legalább $e/2$ élet tartalmaz!

6. Tegyük fel, hogy a $G = (A,B;E)$ páros gráfban minden $X \subseteq A$ - ra teljesül, hogy $|N(X)| \geq |X| + 1$. Bizonyítsuk be, hogy minden e élhez van olyan A-t lefedő párosítás, ami tartalmazza e-t.

   Az e élet és végpontjait elhagyva minden szomszédság legfeljebb egyel csökken, vagyis fenn fog állni a maradék gráfra, hogy $X \subseteq A'$-re $|N(X)| \geq |X|$, vagyis létezik teljes párosítás, amihez hozzávéve az elhagyott e élet és végpontjait megkapjuk az eredeti gráf egy teljes párosítását, ami tartalmazza e-t.

7. Ketten a következő játékot játszák egy G gráfon. Felváltva kiválasztanak $v_1, v_2, \ldots$ pontokat úgy, hogy ezek egy utat alkossanak. Aki nem tud már új pontot választani, veszít. Bizonyítsuk be, hogy (a) a kezdőnek van nyerő stratégiája, ha G-ben nincs teljes párosítás és (b) a másodiknak, ha G-ben van teljes párosítás.

(b) A második veszi a G gráf egy teljes párosítását, és mindig azt a pontot jelöli be, ami ez alapján párja a kezdő játékos lépésének, így ő rak utoljára és nyer.
(a) A kezdő veszi a gráf egy maximális párosítását, és egy ezen kívül eső ponttal kezdi a játékot. A második csak olyan pontot választhat, ami már rajta van a max. párosításon, különben nem lenne maximális a párosítás. Ez után a kezdő mindig azt a pontot választja, ami a második játékos által utoljára bejelölt pont párja. Így a második játékos ezután sem léphet ki a max. párosításból, így a kezdő tud utoljára rakni, és nyer.

8. Bizonyítsuk be, hogy $2n$ ill. $2n - 1$ csapat is le tud játszani egy körmérkőzés bajnokságot (mindenki mindenkivel egyszer játszik) $2n - 1$ fordulóban!