

1. feladat (11+4=15 pont)

a) Legyen

$$a_n = \left(\frac{2n+2}{3n+4}\right)^n, \quad b_n = \left(\frac{5n+2}{5n+4}\right)^n.$$

Határozza meg $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ értékét!b) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?**2. feladat (7+5=12 pont)**

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{\ln(1 + 3x^2)} = ?, \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}(x+3)}{\operatorname{ch}(x+2)} = ?$$

3. feladat (2+3+4+2=11 pont)

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?, \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ?, \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = ?, \quad d) g'(x) = ?$$

4. feladat (3+7=10 pont)

a) Írja le az inverzfüggvény deriválási szabályát!

b) Ennek segítségével bizonyítsa be, hogy $(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$!**5. feladat (3+9=12 pont)**

a) Írja le a derivált definícióját az értelmezési tartomány egy belső pontjában!

b) Írja le és bizonyítsa be az értelmezési tartomány belső pontjára a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltételét!

6. feladat* (7+13=20 pont)

$$a) \int (3x+2) \sin(5x) dx = ?, \quad b) \int \frac{e^x}{e^{2x} + 5e^x + 4} dx = ? \quad (t = e^x \text{ helyettesítéssel})$$

7. feladat* (9 pont)

$$f(t) = \begin{cases} 2t^3, & \text{ha } t \in [0, 1], \\ 2, & \text{ha } t > 1. \end{cases}$$

Határozza meg $x \geq 0$ esetén az $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ integrált! Hol differenciálható az F függvény, és mi a deriváltja?**8. feladat* (5+6=11 pont)**

$$a) \int \frac{1}{4x^2 + 4x + 10} dx = ?, \quad b) \int_0^{\pi} \cos^2(x) dx = ?$$

A *-al jelölt feladatokból legalább 15 pontot el kell érni!