(1) Z_n Galton–Watson elágazó folyamat.

a.) $\mathbb{P}(Z_1=k)=\mathbb{P}(\text{pont } k \text{ sikeres fertőzés})=\mathbb{P}(\text{siker})^k\,\mathbb{P}(\text{lebukás})=q^k p$,

$k=0,1,2\ldots$-re, ahol $q=1-p=\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{2}$, vagyis

$\boxed{Z_1 \sim \text{Pessz. Geom}(p) \quad p=\tfrac{1}{2}\text{-del.}}$

b.) Az egylépéses utódszámeloszlás – vagyis Z_1 – generátorfüggvénye

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} q^k p\cdot z = p\sum_{k=0}^{\infty}(qz)^k=\frac{p}{1-qz}=\frac{1/2}{1-\frac{1}{2}z}=\frac{1}{2-z},$$

vagyis $g_{Z_1}(z)=g(z)=\underline{\underline{\frac{1}{2-z}}}$

c.) $g_{Z_2}(z)=g(g(z))=\dfrac{1}{2-\frac{1}{2-z}}=\underline{\underline{\dfrac{2-z}{3-2z}}}$

d.) Az $r_n:=\mathbb{P}(Z_n=0)$ jelöléssel tudjuk, hogy $r_0=0$ és $r_{n+1}=g(r_n)$,

így $r_0=0$

$r_1=g(r_0)=g(0)=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$

$r_2=g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

$\boxed{r_3=g(\tfrac{2}{3})=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}}$

e.) Az egylépéses utódszámeloszlás várható értéke

$m=\mathbb{E}(\text{PesszGeom}(p))=\frac{1}{p}-1=2-1=1 \Rightarrow$ a $\underline{\underline{\text{folyamat kritikus}}}$

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(\text{kihalás})=1}$

f.) A folyamat kritikus $\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}N=\infty}$.

Info MScMatD „Sztochasztika 2" pótZH megoldókulcs 2014.05.20

Mogy

(2) $X_i := \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik hallgató megjelenik} \\ 0, & \text{ha nem,} \end{cases}$

ahol $n=100$, így $S_n = X_1 + \dots + X_n$ a megjelenő hallgatók száma.

$X_i \sim B(p)$ ahol $p = \frac{2}{3}$, így $m = \mathbb{E}X_i = p = \frac{2}{3}$,

$\sigma := \sqrt{\operatorname{Var} X_i} = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$,

$\delta := \mathbb{E}\left(|X_i - m|^3\right) = \frac{1}{3}\left|0 - \frac{2}{3}\right|^3 + \frac{2}{3}\left|1 - \frac{2}{3}\right|^3 = \frac{2^3}{3^4} + \frac{2}{3^4} = \frac{10}{81}$,

Végül is a Berry–Esseen tétel szerint

a CHT becslés hibája $\leq \dfrac{C\delta}{\sqrt{n}\,\sigma^3} = \dfrac{0.4748 \cdot \frac{10}{81}}{10 \cdot \frac{\sqrt{2}^3}{3^3}} = \dfrac{0.4748 \cdot \sqrt{2}}{12} \approx 0.056 = \underline{5.6\%}$.

Mogy

(3) <u>1. megoldás</u>: A megjelentek száma $S_n := X_1 + \ldots + X_n$,

ahol $X_i \sim B(p)$ f.a.eo, $p = \frac{2}{3}$ és $n = 100$.

A Hoeffding egyenlőtlenség érvényes $a_i \le X_i \le b_i$, $a_i = 0$, $b_i = 1$,

$\mathbb{E}S_n = np = \frac{200}{3}$ és $t := 85 - \frac{200}{3}$ választással, így

$$\underline{\underline{\mathbb{P}(S_n \ge 85)}} = \mathbb{P}(S_n \ge \mathbb{E}S_n + t) \overset{\text{Hoeffding}}{\underline{\underline{\le}}} \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right) = e^{-\frac{2(85-66.66)^2}{100 \cdot 1^2}} =$$

$$= e^{-6.722} \approx 0.0012 = \underline{\underline{0.12\%}}$$

<u>2. megoldás</u>: A megjelentek száma $S_n = X_1 + \ldots + X_n$,

ahol $X_i \sim B(p)$ f.a.eo, $p = \frac{2}{3}$ és $n = 100$.

A Cramér tétel érvényes $m = \mathbb{E}X_i = \frac{2}{3}$, $a = \frac{85}{100} = 0.85$, és $b = \infty$

választással, vagyis $a < m$ és

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n \ge 85)} = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \ge 0.85\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b)\right) \underset{m<a}{\overset{\text{Cramér}}{\lesssim}} e^{-nI(a)} =$$

$$= e^{-100\left[0.85 \ln \frac{1/3 - 0.85}{2/3 - 0.15} - \ln \frac{1/3}{0.15}\right]} \approx e^{-8.67} \approx 0.00017 = \underline{\underline{0.017\%}}$$