1. feladat (10 pont)

Határozza meg a következő hatványsor konvergenciasugarát, konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)2^{2n}} x^n$$

$$a_n = \frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)2^{2n}} = \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2n+1}{2n+3} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)\right| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{4} \quad (4) \implies R = \frac{4}{3} \quad (1)$$

$x = \frac{4}{3}$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{4}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$ konvergens, mert Leibniz sor. (2)

$x = -\frac{4}{3}$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(-\frac{4}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$ tehát a minoráns kritérium alapján a függvénysor $x = -\frac{4}{3}$-nál div. (2)

Konvergencia tartomány: $\left(-\frac{4}{3}, +\frac{4}{3}\right]$ (1)

2. feladat (15 pont)

Határozza meg a következő hatványsor konvergenciasugarát és összegét!

$$\sum_{n=2}^{\infty} n x^{n+2}$$

$$a_{n+2} = n; \quad a_n = n-2$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n-2}} = 1, \text{ mert } \sqrt[n]{1} = 1 \le \sqrt[n]{n-2} \le \sqrt[n]{n}$$ (5)

$$\sqrt[n]{1} \to 1, \quad \sqrt[n]{n} \to 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n x^{n+2} = x^3 \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1} = x^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) \overset{(4)}{=} x^3 \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=2}^{\infty} x^n\right) =$$

$$= x^3 \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x}\right) \overset{(3)}{=} x^3 \frac{2x(1-x) - x^2(-1)}{(1-x)^2} = \underline{\underline{\frac{x^4(2-x)}{(1-x)^2}}} \quad (3), \text{ ha } |x| < 1$$

3. feladat (15 pont)

Adja meg a következő függvény $x_0 = 0$ valamint $x_1 = 2$ bázispontú Taylor-sorát, és határozza meg a Taylor-sorok konvergenciatartományát!

$$f(x) = \frac{2}{3+4x}$$

$f(x)$-ben konvergens geometriai sorok összegét ismerjük fel.

7 $x_0 = 0$ esetén:

$$f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-4x}{3}\right)} \; 3 \; = \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-4x}{3}\right)^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-4)^n}{3^{n+1}}\cdot x^n}}, \; 2$$

ha $|q| = \left|\frac{-4x}{3}\right| < 1$, azaz ha $|x| < \frac{3}{4}$, tehát $\underline{\underline{K.T. = \left(-\frac{3}{4}, +\frac{3}{4}\right)}}$ 2

8 $x_1 = 2$ esetén:

$$f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{3+4(x-2)+8} = \frac{2}{11+4(x-2)} = \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-4(x-2)}{11}\right)} \; 4$$

$$= \frac{2}{11}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-4(x-2)}{11}\right)^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-4)^n}{11^{n+1}}(x-2)^n}} \; 2$$

, ha $|q| < 1$, azaz ha $\left|\frac{-4(x-2)}{11}\right| < 1$, tehát $|x-2| < \frac{11}{4}$. $K.T. = \left(-\frac{11}{4}+2, +\frac{11}{4}+2\right)$

$$= \underline{\underline{\left(-\frac{3}{4}, \frac{19}{4}\right)}} \; 2$$

4. feladat (15 pont)

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-3x^3}}$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát! Mennyi a sor konvergenciasugara? A Taylor-sor segítségével adja meg (elemi műveletekkel kifejezve) az $f^{(12)}(0)$ és $f^{(13)}(0)$ deriváltak értékét!

$$f(x) = (16-3x^3)^{-1/4} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{3x^3}{16}\right)^{-1/4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/4}{n}\cdot\left(\frac{-3}{16}\right)^n x^{3n}}} \; 6$$

A konvergenciasugárra teljesül, hogy $\left|\frac{3R^3}{16}\right| = 1$, tehát $\underline{\underline{R = \sqrt[3]{\frac{16}{3}}}}$ 3

$$f^{(12)}(0) = 12!\cdot a_{12} = 12!\cdot\frac{1}{2}\cdot\binom{-1/4}{4}\left(-\frac{3}{16}\right)^4 = \underline{\underline{\frac{12!}{2}\cdot\frac{(-1/4)\cdot(-5/4)(-9/4)\cdot(-13/4)}{4!}\cdot\frac{3^4}{16^4}}} \; 4$$

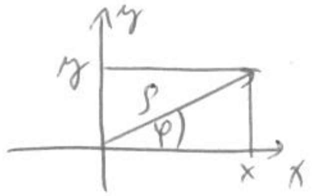
$$f^{(13)}(0) = 13!\cdot a_{13} = \underline{\underline{0}} \; 2$$

5. feladat (8 pont)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{4xy}{3x^2+2y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq 0\\ 1, & \text{ha } (x,y)=0\end{cases}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?$$

Hol folytonos az f függvény?

Legyen $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$



$\rho\neq 0$ esetén

$$f(x,y)=\frac{4xy}{3x^2+2y^2}=\frac{4\cancel{\rho^2}\sin\varphi\cos\varphi}{3\cancel{\rho^2}\cos^2\varphi+2\cancel{\rho^2}\sin^2\varphi}$$

$$=\frac{4\sin\varphi\cos\varphi}{3\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi}$$ (4)

Ennek a kifejezésnek $\rho\to 0$ esetén nem létezik a határértéke (függ φ-től), tehát $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. (2)

Így f az origóban nem folytonos. Minden más pontban folytonos, mert két polinom hányadosa, és a nevező nem nulla (2)

6. feladat (17 pont)

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{ha } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$$

a) Folytonos-e f az origóban?

b) Határozza meg $f(x,y)$ parciális deriváltjait! (Az origóban a definícióval dolgozzon!)

c) Mely pontokban létezik és hol nem létezik f totális deriváltja? (Válaszát indokolja.)

a, $\boxed{4}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\underset{\downarrow\atop 0}{\rho}\,\underbrace{\cos\varphi\cdot\sin\left(\frac{1}{\rho^2}\right)}_{\text{korlátos}}=0=f(0,0),$$ tehát

$x=\rho\cos\varphi$

$y=\rho\sin\varphi$

f folytonos az origóban! (4)

b, $\boxed{10}$ Ha $(x,y)\neq(0,0)$:

$$f'_x(x,y)=\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+x\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$ (3)

$$f'_y(x,y)=x\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$$ (2)

Ha $(x,y)=(0,0)$:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h\sin\left(\frac{1}{h^2+0^2}\right)-0\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)=\nexists,$$ (3)

mert tetszőleges $\varepsilon>0$ alatt található végtelen sok h, melyre $\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)=+1$, ill. $\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)=-1$, így az átviteli elv alapján nem létezik a határérték.

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$ (2)

$\boxed{3}$ C, Az origón kívül a parciális deriváltak léteznek és folytonosak, tehát $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$-án f totálisan deriválható. (2)

Az origóban az egyik parciális derivált nem létezik, tehát itt f nem deriválható totálisan. (1)

7. feladat (10 pont)

Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, és legyen $g(x,y)=f(x^2-2y)$. Számítsa ki a következő másodrendű parciális deriváltakat:

$$g''_{xx}(x,y)=?;\qquad g''_{xy}(x,y)=?;\qquad g''_{yx}(x,y)=?;\qquad g''_{yy}(x,y)=?$$

$$g'_x(x,y)=f'(x^2-2y)\cdot 2x;$$ (2)

$$g'_y(x,y)=-2f'(x^2-2y);$$ (2)

$$g''_{xx}(x,y)=2f'(x^2-2y)+4x^2f''(x^2-2y);$$ (2)

$$g''_{xy}(x,y)=-4xf''(x^2-2y)=g''_{yx}(x,y);$$ (2)

$$g''_{yy}(x,y)=+4f''(x^2-2y)$$ (2)

8. feladat (10 pont)

$$f(x,y) = \frac{3x+4xy}{x^2+1}, \qquad (x_0,y_0) = (1,2), \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Határozza meg a fent megadott $f(x,y)$ függvénynek az $(1,2)$ pontban a $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos irányú iránymenti deriváltját!

f mindenütt totálisan deriválható (polinomok hányadosa, a nevező nem nulla), így az iránymenti derivált számolható a gradiensből.

$$f'_x(x,y) = \frac{(3+4y)(x^2+1)-(3x+4xy)2x}{(x^2+1)^2}; \quad (2)$$

$$f'_x(1,2) = \frac{11\cdot 2 - 11\cdot 2}{4} = 0 \quad (1)$$

$$f'_y(x,y) = \frac{4x}{x^2+1} \quad (2)$$

$$f'_y(1,2) = \frac{4}{2} = 2 \quad (1) \qquad \Rightarrow \operatorname{grad} f\Big|_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5; \qquad \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{(1,2)} = \operatorname{grad} f\Big|_{(1,2)} \cdot \underline{e} \overset{(2)}{=} 0\cdot\frac{3}{5} + 2\cdot\left(\frac{-4}{5}\right) = \underline{\underline{-\frac{8}{5}}} \quad (1)$$

Pótfeladatok. A következő feladatokat csak az elégséges szint (40%) eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (10 pont)

Írja fel a következő függvények $x_0 = 0$ bázispontú, ötödrendű Taylor-polinomját!

$$f(x) = \sin(3x^2), \qquad g(x) = \mathrm{ch}(3x^2)$$

f(x) esetén:

$$T_5(x) = 0 + 3x^2 - \cancel{\frac{(3x^2)^3}{3!}} = 0 + 3x^2 = \underline{\underline{3x^2}} \quad 5$$

$$\left(\sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}, \quad \text{most } y = 3x^2 \right)$$

g(x) esetén:

$$T_5(x) = 1 + \frac{(3x^2)^2}{2!} = \underline{\underline{1 + \frac{9}{2}x^4}} \quad 5$$

$$\left(\mathrm{ch}\, y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} y^{2n}, \quad \text{most } y = 3x^2 \right)$$

10. feladat (10 pont)

Határozza meg az $f(x, y) = 6 - x^2 - 3xy^2$ függvény grafikonját az $(x_0, y_0) = (2, -1)$ pontban érintő sík egyenletét!

$f(2,-1) = 6 - 4 - 6 = -4$ 2

$f'_x(x,y) = -2x - 3y^2$; $f'_x(2,-1) = -4 - 3 = -7$ 2

$f'_y(x,y) = -6xy$; $f'_y(2,-1) = +12$ 2

Általában:

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \quad 2$$

Most:

$$\underline{\underline{z = -4 - 7(x-2) + 12(y+1)}} \quad 2$$

$$(7x - 12y + z = 22)$$