---

1. feladat (20 pont)

A jobb és bal oldali határértékek kiszámítása után döntsön, hogy hol és milyen szakadása van az alábbi függvényeknek!

$$f(x) = \frac{\sin^2(2\sqrt[3]{x})}{7\sqrt[3]{x^2}} \qquad g(x) = (x-5)\, e^{\frac{1}{x+2}}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{(x^2+x-2)(x-1)}$$

5 f szakadási helye: $x=0$

$$\lim_{x\to 0} \Big(\underbrace{\frac{\sin 2\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}}}_{\to 1}\Big)^2 \frac{2^2}{7} = \frac{4}{7}$$: megszüntethető szakadás (elsőfajú szakadás)

6 g szakadási helye: $x=-2$

$$g(-2+0) = \lim_{x\to -2+0} \underbrace{(x-5)}_{\to -7}\, \underbrace{e^{\frac{1}{x+2}}}_{\to\infty} = -\infty \qquad \frac{1}{x+2} \to +\infty \ \left(\frac{1}{+0} \text{ alakú}\right)$$

$$g(-2-0) = \lim_{x\to -2-0} \underbrace{(x-5)}_{\to -7}\, \underbrace{e^{\frac{1}{x+2}}}_{\to 0} = 0 \qquad \frac{1}{x+2} \to -\infty \ \left(\frac{1}{-0} \text{ alakú}\right)$$

$x=-2$-ben másodfajú szakadása van

$$h(x) = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{(x+2)(x-1)(x-1)} = \frac{|x+2|}{x+2}\,\frac{1}{(x-1)^2}$$ 1

Szakadási helyek: $x=-2$ ill. $x=1$

3 $$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \Big(\underbrace{\frac{1}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to +0}}}_{+\infty}\, \underbrace{\frac{|x+2|}{x+2}}_{\to 1}\Big) = +\infty$$ másodfajú szak.

5 $$h(-2+0) = \lim_{x\to -2+0} \underbrace{\frac{x+2}{x+2}}_{=1}\, \underbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}_{\to 1/9} = \frac{1}{9}$$

$$h(-2-0) = \lim_{x\to -2-0} \underbrace{\frac{-(x+2)}{x+2}}_{=-1}\, \underbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}_{\to 1/9} = -\frac{1}{9}$$

véges ugrás (elsőfajú szak.)

an1z2p110505/1.

2. feladat (10 pont)

a) Írja fel a differenciálhányados definícióját az értelmezési tartomány belső x_0 pontjában!

b) A derivált definíciójával határozza meg az

$$f(x) = \sqrt{2x + 7}$$

függvény deriváltját az $x_0 = 1$ pontban!

a.) $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ (3)

b.) $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(1+h)+7} - 3}{h} =$$ (2)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+2h} - 3}{h} \cdot \frac{\sqrt{9+2h}+3}{\sqrt{9+2h}+3} =$$ (2)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9+2h-9}{h(\sqrt{9+2h}+3)} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{h}{h}}_{=1} \frac{2}{\sqrt{9+2h}+3} = \frac{1}{3}$$ (3)

3. feladat (22 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{2}{3-x}, & \text{ha } x \neq 3 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } x = 3 \end{cases}$$

a) Hol és milyen típusú szakadása van a függvénynek? (Indokoljon!)

b) Írja fel $f'(x)$-et, ahol az létezik!

c) Adjon meg egy intervallumot, melyen f invertálható! (Indokoljon!)
$f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$

a.) Szakadási hely lehet: $x = 3$

$\boxed{6}$

$$\lim_{x\to 3-0} \operatorname{arctg}\Big(\underbrace{\frac{2}{\underbrace{3-x}_{\to +0}}}_{+\infty}\Big) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 3-0} \operatorname{arctg}\Big(\underbrace{\frac{2}{\underbrace{3-x}_{\to -0}}}_{-\infty}\Big) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} = f(3-0) = f(3)$$

véges ugrása van

an1z2p110505/2.

b.) $\boxed{5}$ $f'(3) \nexists$, mert f nem folytonos $x=3$-ban (1)

Ha $x \neq 3$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3-x}\right)^2}\, 2 \cdot \frac{-1}{(3-x)^2}\,(-1) \quad \left(= \frac{2}{(3-x)^2+4}\right)$$ (4)

c.) $\boxed{11}$ $(3,\infty)$-en $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ szigorúan monoton nő

$\Rightarrow \exists f^{-1}$ (2)

(Vagy $(-\infty, 3)$-on ....)

Tehát $x \in (3,\infty)$:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$; $f(3+0) = -\frac{\pi}{2}$ és f szig. mon. nő

$\Rightarrow R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ (3)

$y = \operatorname{arctg} \frac{2}{3-x} \Rightarrow \operatorname{tg} y = \frac{2}{3-x} \Rightarrow 3-x = \frac{2}{\operatorname{tg} y}$

$\Rightarrow x = 3 - \frac{2}{\operatorname{tg} y}$ $\quad x \Leftrightarrow y$:

$f^{-1}(x) = 3 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$ (4)

$\underbrace{D_{f^{-1}} = R_f}_{(2)} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

4. feladat (13 pont)

$$f(x) = (1+\operatorname{ch} 2x)^{1+x/4}$$

a) $f'(x) = ?$
b) Írja fel az $x=0$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!

a.) $\boxed{9}$ $f(x) = e^{\left(1+\frac{x}{4}\right)\ln(1+\operatorname{ch}2x)}$ (2) $\quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{\left(1+\frac{x}{4}\right)\ln(1+\operatorname{ch}2x)} \cdot \left(\left(1+\frac{x}{4}\right)\ln(1+\operatorname{ch}2x)\right)' =$ (2)

$= (1+\operatorname{ch}2x)^{1+\frac{x}{4}}\left(\frac{1}{4}\cdot\ln(1+\operatorname{ch}2x) + \left(1+\frac{x}{4}\right)\frac{2\cdot\operatorname{sh}2x}{1+\operatorname{ch}2x}\right)$ (5)

b.) $y_é = f(0) + f'(0)(x-0) = 2 + 2\frac{\ln 2}{4}x$ $\boxed{4}$ (2) (2)

5. feladat (24 pont)

Keresse meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x^2}-1}{4x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(2x)}{\operatorname{sh}(3x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^4 \ln x^3$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{2x}-3e^{-4x}+3}{2e^{2x}+5e^{-4x}+e^x}$

a.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x^2}-1}{4x^2} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overset{\to\infty}{e^{2x^2}} \cdot 4x}{\underbrace{8x}_{=\frac{1}{2}}} = \infty$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$

b.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{sh} 3x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2}{3\cdot \operatorname{ch} 3x} = \dfrac{2}{3}$ $\quad \frac{0}{0}$

c.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln x^3}{\underbrace{\frac{1}{x^4}}_{=x^{-4}}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\frac{1}{x^3}\cdot 3x^2}{-4x^{-5}} =$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$

$= \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{-3}{4} x^4 = 0$

d.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} \underbrace{\dfrac{e^{-4x}}{e^{-4x}}}_{=1} \dfrac{e^{6x}-3+3e^{4x}}{2e^{6x}+5+e^{5x}} = \dfrac{0-3+0}{0+5+0} = -\dfrac{3}{5}$

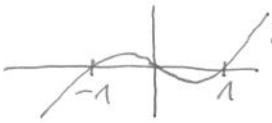
6. feladat (11 pont)

$$f(x) = e^{2x^4 - 4x^2 + 7}$$

Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken f monoton nő, illetve monoton csökken!
Hol és milyen lokális szélsőértéke van?

$$f'(x) = e^{2x^4-4x^2+7} \cdot (8x^3 - 8x) = 8x(x^2-1)\underbrace{e^{2x^4-4x^2+7}}_{>0}$$

2 1



$8x(x^2-1) = 8x(x-1)(x+1)$

x:	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f':	−	0	+	0	−	0	+
f:	↘	lok. min.	↗	lok. max.	↘	lok. min	↗

8

Pótfeladat (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (11 pont)

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2-5x} - \sqrt{4x^2-8x-7}\right) = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 7x} = ?$

a.) $\boxed{7}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x} - \sqrt{4x^2-8x-7}\right)\frac{\sqrt{4x^2-5x}+\sqrt{4x^2-8x-7}}{\sqrt{4x^2-5x}+\sqrt{4x^2-8x-7}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-5x-(4x^2-8x-7)}{\sqrt{4x^2-5x}+\sqrt{4x^2-8x-7}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x+7}{\sqrt{4x^2-5x}+\sqrt{4x^2-8x-7}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}\ \frac{3+\frac{7}{x}}{\sqrt{4-\frac{5}{x}}+\sqrt{4-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}}} = -1\cdot\frac{3+0}{\sqrt{4-0}+\sqrt{4-0-0}} = -\frac{3}{4}$$

$$= \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$$

anlz2p110505/5.

b.) $\boxed{4}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\cos 4x \cdot \sin 7x} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{\cos 4x}}_{1} \underbrace{\frac{\sin 4x}{4x}}_{1} \underbrace{\frac{7x}{\sin 7x}}_{1} \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$

8. feladat (9 pont)

$$f(x) = \pi + \arcsin(2x^2 - 3)$$

Határozza meg az f függvény értelmezési tartományát, értékkészletét!

$f'(x) = ?$

É.T.: $-1 \le 2x^2 - 3 \le 1$

$2 \le 2x^2 \le 4$

$1 \le x^2 \le 2$

$1 \le |x| \le \sqrt{2}$ 2 $\qquad D_f = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$ 1

É.K.: $\arcsin(2x^2 - 3) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow R_f = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 3

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^2-3)^2}} \cdot 4x \quad , 1 < |x| < \sqrt{2}$ 3

an1z2p110505/6.