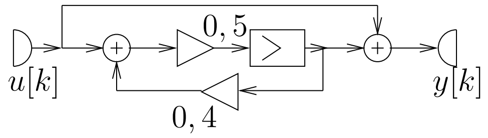
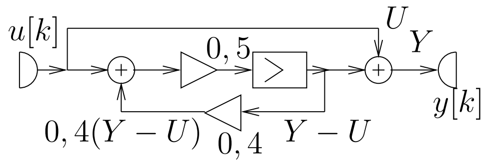
Diszkrét idejű jelek és rendszerek

1. A DI rendszer az alábbi hálózattal adott:



Adja meg a rendszer rendszeregyenletét!

A hálózat alapján előbb az átviteli függvényt célszerű meghatározni.



$Y = z^{-1}0,5\,[0,4(Y-U)+U]+U, \;\rightarrow$
$Y(1-0,2z^{-1}) = U(1+0,3z^{-1}), \;\rightarrow$
$H(z) = \frac{1+0,3z^{-1}}{1-0,2z^{-1}}$, így a rendszeregyenlet:
$y[k]-0,2y[k-1] = u[k]+0,3u[k-1]$.

2. Adja meg az előző feladat rendszerének impulzusválaszát!

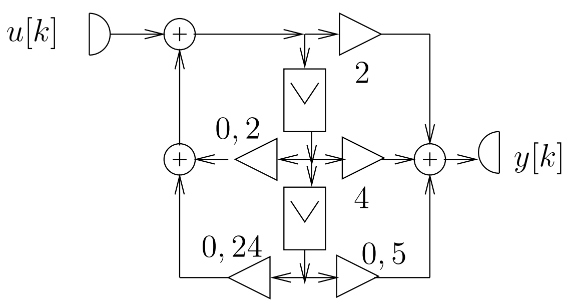
$H(z) = \frac{1+0,3z^{-1}}{1-0,2z^{-1}} = \frac{1-0,2z^{-1}+0,5z^{-1}}{1-0,2z^{-1}} = 1+z^{-1}0,5\frac{1}{1-0,2z^{-1}}$, $h[k] = \delta[k]+0,5\varepsilon[k-1]0,2^{k-1}$.

3. Adja meg az első feladat rendszerének állapotváltozós leírását!

Az állapotváltozó a késleltető kimeneti jele.

$x[k+1] = 0,5(0,4x[k]+u[k]) \quad x[k+1] = 0,2x[k]+0,5u[k]$
$y[k] = x[k]+u[k] \quad y[k] = x[k]+u[k]$

4. A diszkrét idejű rendszer az alábbi hálózattal adott:



Adja meg a rendszer állapotváltozós leírását normál alakban!

A felső illetve az alsó késleltető kimeneti jelét x_1-gyel illetve x_2-vel jelölve

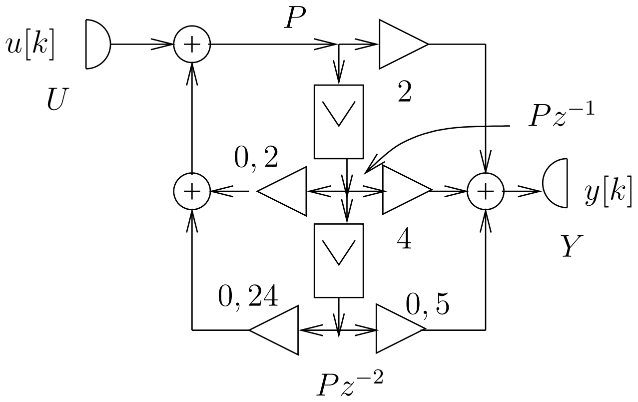
$x_1[k+1] = 0,2x_1[k]+0,24x_2[k]+u[k]$
$x_2[k+1] = x_1[k]$
$y[k] = 4,4x_1[k]+0,98x_2[k]+2u[k]$

5. Stabilis-e az előző feladat hálózata?

$\begin{vmatrix} 0,2-\lambda & 0,24 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-0,2\lambda-24 = 0$, $\lambda_1 = 0,6$, $\lambda_2 = -0,4$, a rendszermátrix sajátértékeinek abszolút értéke 1-nél kisebb, a hálózat által reprezentált rendszer aszimptotikusan stabilis, tehát a hálózat stabilis.

6. Adja meg a 4. feladatban hálózattal adott diszkrét idejű rendszer rendszeregyenletét!

Az átviteli függvényt célszerű először meghatározni, amelyhez a komplex frekvencia tartományban felírt egyenletekből jutunk.



$P = 0,2z^{-1}P + 0,24z^{-2}P + U,$
$P = \frac{U}{1-0,2z^{-1}-0,24z^{-2}},$
$Y = 2P + 4z^{-1}P + 0,5z^{-2}P$
$Y = P(2 + 4z^{-1} + 0,5z^{-2})$
$Y = U\frac{2+4z^{-1}!0,5z^{-2}}{1-0,2z^{-1}-0,24z^{-2}},$
$H(z) = \frac{2+4z^{-1}!0,5z^{-2}}{1-0,2z^{-1}-0,24z^{-2}}$
Ennek alapján a rendszeregyenlet:
$y[k] - 0,2y[k-1] - 0,24y[k-2] =$
$2u[k] + 4u[k-1] + 0,5u[k-2].$

7. Határozza meg a 4. feladatban hálózattal adott diszkrét idejű rendszer impulzusválaszát!

   A hálózat alapján az átviteli függvényt célszerű először meghatározni, az impulzusválasz ennek inverz z-transzformáltja. Az előző feladat megoldásából: $H(z) = \frac{2+4z^{-1}!0,5z^{-2}}{1-0,2z^{-1}-0,24z^{-2}} =$
   $\frac{2+4z^{-1}!0,5z^{-2}}{1-0,2z^{-1}-0,24z^{-2}}\frac{z^2}{z^2}zz^{-1} = z^{-1}z\frac{2z^2+4z+0,5}{z^2-0,2z-0,24} = z^{-1}z\frac{2(z^2-0,2z-0,24)+4,4z+0,98}{z^2_0,2z-0,24} = z^{-1}z\left(2 + \frac{4,4z+0,68}{(z-0,6)(z+0,4)}\right) =$
   $2 + z^{-1}z\left(\frac{3,62}{z-0,6} + \frac{0,78}{z+0,4}\right) = 2 + z^{-1}\left(\frac{3,62z}{z-0,6} + \frac{0,78z}{z+0,4}\right),$
   $h[k] = 2\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(3,62(0,6)^{k-1} + 0,78(-0,4)^{k-1}\right).$

8. Adja meg az $f[k] = 5\cos(0,011\pi k + 0,2\pi)$ szinuszos DI jel periódusát!

   A jel K szerint periodikus, ha a k változót K-val megnövelve a koszinusz argumentuma 2π-nek egész számú többszörösével nő azaz, ha van olyan K és N egész szám, hogy

   $$0,011\pi(k+K) + 0,2\pi = 0,011\pi k + 0,2\pi + N2\pi,$$

   Mindkét oldalból $0,011\pi k + 0,2\pi$-t kivonva, és K-t kifejezve: $K = N\frac{2}{0,011}$, a lehető legkisebb N természertes szám, amellyel K-ra is egészet kapunk, $N = 11$, és ezzel a periódus: $K = 2000$

9. Periodikus-e az $f[k] = 2\cos(0,1k)$ szinuszos jel?

   Periodikus, ha van olyan K és N egész szám, hogy k-t K-val megnövelve az argumentum 2π-nek egész többszörösével nő, azaz $0,1(k+K) = 0,1k + N2\pi$, ahonnan $K = N\frac{2\pi}{0,1} = N20\pi$. Nincs ennek eleget tevő egész N és K, a jel nem periodikus.

10. Egy DI rendszer rendszeregyenlete: $y[k] - 0,5y[k-1] = 2u[k] + u[k-1]$. Adja meg a rendszer válaszjelét, ha bemeneti jele a 8. illetve a 9. feladatban szereplő szinuszos jel!

    $H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{2+e^{-j\vartheta}}{1-0,5e^{-j\vartheta}}$, $H\left(e^{j\vartheta}\right)\big|_{\vartheta=0,011\pi} = \frac{2+e^{-j0,011\pi}}{1-0,5e^{-j0,011\pi}} = 5,9921e^{-j0,0460},$
    $y[k] = 29,96\cos(0,011\pi k + 0,5823).$
    $H\left(e^{j\vartheta}\right)\big|_{\vartheta=0,1} = \frac{2+e^{-j0,1}}{1-0,5e^{-j0,1}} = 5,9343e^{-j0,1323}$, $y[k] = 11,8687\cos(0,1k - 0,1323).$

11. Egy DI rendszer impulzusválasza: $h[k] = \delta[k] + 2\varepsilon[k-1]0,4^k$. Írja fel a rendszer rendszeregyenletét!

    $h[k] = \delta[k] + 0,8\varepsilon[k-1]0,4^{k-1}$, $H(z) = 1 + 0,8z^{-1}\frac{1}{1-0,4z^{-1}} = \frac{1+0,4z^{-1}}{1-0,4z^{-1}},$
    $y[k] - 0,4y[k-1] = u[k] + 0,4u[k-1].$

12. Adja meg az előző feladat rendszere válaszjelének gerjesztett összetevőjét, ha gerjesztőjele: $u[k] = 5\varepsilon[k]0,5^k$!

A válasz gerjesztett összetevőjét $y_g[k] = A0,5^k$ alakban keressük, behelyettesítve a rendszeregyenletbe: $A0,5^k - 0,4A0,5^{k-1} = 5 \cdot 0,5^k + 2 \cdot 0,5^{k-1}$, egyszerűsítve $0,5^{k-1}$-gyel: $0,5A - 0,4A = 2,5 + 2$, ahonnan $A = 45$, $y_g[k] = 45 \cdot 0,5^k$.

13. Adja meg az $x[k] = 2\delta[k] + 4\delta[k-1] + 6\delta[k-2]$, ha $0 \le k \le 3$, és $x[k+4] = x[k]$ periodikus DI jel valós és komplex alakú Fourier sorát!

A periódus: $L = 4$, a diszkrét alap körfrekvencia: $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{L} = \frac{\pi}{2}$, az egyik valós illetve a komplex alak: $x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^{2} X_p \cos(p\vartheta_0 k + \rho_p)$, illetve $x[k] = \sum_{p=0}^{3} X_p^C e^{jp\vartheta_0 k}$. A komplex Fourier együtthatók az $X_p^C = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} x[k]e^{-jp\vartheta_0 k}$ formulával számíthatók.

$p = 0$: $X_0^C = \frac{1}{4}(2 + 4 + 6 + 0) = 3, \quad X_0^C = X_0 = 3.$

$p = 1$: $X_1^C = \frac{1}{4}\left(2e^{-j1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 0} + 4e^{-j1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1} + 6e^{-j1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2} + 0e^{-j1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 3}\right) = -1 - j = \sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}$,
$X_1 = 2\left|X_1^C\right| = 2\sqrt{2}, \qquad \rho_1 = arc\left(X_1^C\right) = -\frac{3\pi}{4}$

$p = 2$: $X_2^C = \frac{1}{4}\left(2e^{-j2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 0} + 4e^{-j2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1} + 6e^{-j2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2} + 0e^{-j2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 3}\right) = 1$,
$X_2 = \left|X_2^C\right| = 1, \qquad \rho_2 = arc\left(X_2^C\right) = 0$

$p = 3$: $X_3^C = \left(X_{-3}^C\right)^* = \left(X_1^C\right)^* = -1 + j$

Valós alak: $x[k] = 3 + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi k)$,

Komplex alak: $x[k] = 3 + (-1 - j)e^{j\frac{\pi}{2}k} + 1e^{j\pi k} + (-1 + j)e^{j3\frac{\pi}{2}k}$.

14. Egy 6 periódusú DI jel komplex Fourier együtthatói: $F_0^C = 1$, $F_1^C = -1$,, $F_2^C = j$, $F_3^C = -1$. Adja meg a jel Fourier sorát és értékeit $k = 0$, 1, 2, 3, 4 és $k = 5$-re!

$f[k] = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}k + \pi\right) + 2\cos\left(2\frac{\pi}{3}k + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi k + \pi)$,

k	0	1	2	3	4	5
$f[k]$	-2	$-0,7321$	$2,7321$	4	$-0,7321$	$2,7321$

15. Egy hangfrekvenciás jel felső sávkorlátja $20kHz$. Mekkora T időközönként vett mintáiból rekonstruálható a jel?

$T < \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{2\pi\cdot 20}ms = \frac{1}{40}ms = 25\mu s.$

16. Határozza meg a $H_F(s) = \frac{s}{s+2}$ átviteli függvényű folytonos idejű rendszer diszkrét idejű szimulátorának átviteli függvényét $T = 0,05$ mintavételi periódus idő mellett!

(a) Bilineáris transzformációval: $H_D(z) = H_F(s)\big|_{s=\frac{p}{T}\frac{z-1}{z+1}}$, ahol $p \le 2$. A $p = 2$ paraméterrel:
$H_D(z) = \dfrac{40\frac{z-1}{z+1}}{40\frac{z-1}{z+1} + 2} = \frac{40z-40}{42z-38} = \frac{0,9524-0,9524z^{-1}}{1-0,9048z^{-1}}$.

(b) Az impulzusválasz transzformációjával: $h_D[k] = A\delta[k] + \varepsilon[k]Tf(kT)$, ahol $h_F(t) = A\delta(t) + \varepsilon(t)f(t)$.
$H_F(s) = \frac{s+2-2}{s+2} = 1 + \frac{-2}{s+2}, \qquad h_F(t) = 2\delta(t) - 2\varepsilon(t)e^{-2t}$, so
$h_D[k] = \delta[k] - \varepsilon[k-1]0,1e^{-0,1k} = \delta[k] - \varepsilon k - 10,1 \cdot 0,9048^k$
$h[k] = \delta[k] - 0,0905\varepsilon[k-1]0,9048^{k-1}$,
$H(z) = 1 + \frac{-0,0905}{1-0,9048z^{-1}} = \frac{0,9095-0,9048y^{-1}}{1-0,9048z^{-1}}$.

17. Adott a DI rendszer $y[k] + 0,5y[k-1] = u[k]$ rendszeregyenlete. Számítsuk ki

(a) a válaszjelet, ha $u[k] = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$,

(b) a válaszjel numerikus értékeit $k = 0$, 1, 2 és 3-ra, ha $u[k] = 3\varepsilon[k]\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$,

(c) a válaszjel formuláját, ha $u[k] = 3\varepsilon[k]\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$! Adja meg a formulával kapott értékeket $k = 0,\ 1,\ \ldots\ 5$-re!

(a) $H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{1}{1+0{,}5e^{-j\vartheta}}$, $H\left(e^{j\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1-j0{,}5} = 0,8944e^{j0{,}4636}$,

$y[k] = 2,6833\cos\left(\frac{\pi}{2}k + 0,4636\right)$,

(b) Megoldás ütemről ütemre:

k	$y[k-1]$	$u[k]$	$y[k] = u[k] - 0,5y[k-1]$
0	0	3	3
1	3	0	$-1,5$
2	$-1,5$	-3	$-2,25$
3	$-2,25$	0	$1,125$

(c) $u[k] = Re\left[3\varepsilon[k]e^{j\frac{\pi}{2}k}\right]$, a rendszer linearitása miatt a válasz az $u_1[k] = 3\varepsilon[k]e^{j\frac{\pi}{2}k} = 3\varepsilon[k]j^k$ bemeneti jelhez tartozó válasz valós része.

$H(z) = \frac{1}{1+0{,}5z^{-1}}$, $U_1(z) = \frac{3}{1-jz^{-1}}$, $Y_1(z) = H(z)U_1(z) = \frac{3}{(1+0{,}5z^{-1})(1-jz^{-1})}$.

$Y_1(z) = \frac{3}{(1+0{,}5z^{-1})(1-jz^{-1})}\frac{z}{z^2}z = z\frac{3z}{(z+0{,}5)(z-j)} = z\left(\frac{2{,}4+j1{,}2}{z-j} + \frac{0{,}6-j1{,}2}{z+0{,}5}\right)$

$y_1[k] = \varepsilon[k]\left(2,4 + j1,2)j^k + (0,6 - j1,2)(-0,5)^k\right)$,

$y[k] = Re\left(y_1[k]\right) = \varepsilon[k]\left[Re\left(2,6833e^{j0{,}4636}e^{j\frac{\pi}{2}k}\right) + 0,6(-0,5)^k\right]$,

$y[k] = \varepsilon[k]\left[Re\left(2,6833e^{j\left(\frac{\pi}{2}k+0{,}4636\right)}\right) + 0,6(-0,5)^k\right]$,

$y[k] = \varepsilon[k]\left[2,6833\cos\left(\frac{\pi}{2}k + 0,4636\right) + 0,6(-0,5)^k\right]$.

k	0	1	2	3	4	5
$y[k]$	$3,0001$	$-1,4999$	$-2,2501$	$1,1249$	$2,4376$	$-1,2186$

Az első 4 érték (kerekítésből adódó kis eltéréssel) ugyanaz, mint a b) pont eredménye.

18. Adja meg az előző feladatban rendszeregyenlettel adott DI rendszer amplitúdó karakterisztikáját! Számítsa ki az amplitúdó karakterisztika értékét a diszkrét körfrekvencia 0, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$ és π értékeire! Ezen értékek felhasználásával vázolja az amplitúdó karakterisztikát a $-\pi$, 2π intervallumon!

Az amplitúdó karakterisztika az átviteli karakterisztika abszolút értéke.

$H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{1}{1+0{,}5e^{-j\vartheta}}$, $H(\vartheta) = \frac{1}{\left|1+0{,}5e^{-j\vartheta}\right|} = \frac{1}{\sqrt{(1+0{,}5\cos\vartheta)^2+(-0{,}5\sin\vartheta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}25+\cos\vartheta}}$.

ϑ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$H(\vartheta)$	$0,6667$	$0,7148$	$0,8944$	$1,3572$	2

Az amplitúdó karakterisztika $(0,\pi)$ intervallumbeli ábrájából kiindulva megrajzolható a $(-\pi, 0)$ közötti szakasz, figyelembe véve, hogy az amplitúdó karakterisztika páros ($H\left(e^{j(-\vartheta)}\right) = \left[H\left(e^{j\vartheta}\right)\right]^*$). Az átviteli karakterisztika, így az amplitúdó karakterisztika is 2π szerint periodikus, tehát a $(\pi, 2\pi)$ közötti szakasz azonos a $(-\pi, 0)$ intervallumbelivel.