ANALÍZIS(1) **II. ZÁRTHELYI** **1998. április 23.**

Műszaki Informatika szak A csoport Munkaidő: 90 perc

BME, Természet- és Társadalomtudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. Feladat (15 pont)

Mutassa meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet egzakt, és határozza meg az $y(2) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását:

$$\left(4x^3y^3 + 3x^2y^2 + 2x\right)\,\mathrm{d}x + \left(3x^4y^2 + 2x^3y - 4y^3\right)\,\mathrm{d}y = 0$$

2. Feladat (10 pont)

Keressen $t = \dfrac{x}{y}$-tól függő multiplikátort az $\dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}x + yx\,\mathrm{d}y = 0$ differenciálegyenlethez! (A differenciálegyenletet nem kell megoldania!)

3. Feladat (20 pont)

Adja meg α értékét úgy, hogy az $y'' - \alpha y = \mathrm{e}^{5x}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenciálegyenletnél külső rezonancia lépjen fel! Ezen α érték esetén válaszoljon az alábbi kérdésekre:

a) Milyen szerkezetű az általános megoldás?

b) Milyen alakban kereshető egyik megoldása?

c) Határozza meg az általános megoldást! (A fenti α érték esetén.)

4. Feladat (15 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorait (annak első négy nem nulla tagját) valamint az egyes Taylor sorok konvergenciasugarát!

$$f(x) = \sqrt[7]{(1+x)^2}\,, \qquad g(x) = \sqrt[7]{(1+3x^2)^2}$$

(A Taylor sor együtthatóit szorzat alakban is megadhatja.)

5. Feladat (10 pont)

Egyenletesen konvergens-e az $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$ függvénysorozat a $(-\infty, \infty)$ intervallumon? $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = ?$

6. Feladat (20 pont)

a) Határozza meg a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot kx^k$ hatványsor konvergenciasugarát és az összegfüggvényét! Jelöljük $T(x)$-szel az összegfüggvényt!

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, k \cdot 2^k}{3^{k+1}} = ?$

c) $T^{(10)}(x)\big|_{x=0} = ?$

7. Feladat (20 pont)

a) Írja fel az $f(x) = \operatorname{ch} 2x$ és a $g(x) = \cos 2x \quad x_0 = 0$ körüli Taylor sorait!

b) Adja meg $A \neq 0,\ \alpha \neq 0$ értékét úgy, hogy $\operatorname{ch} \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \cos \dfrac{2}{\sqrt{n}} \sim A n^{\alpha}$.

c) Bizonyítsa be, hogy a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{2}{\sqrt{n}} - \cos \frac{2}{\sqrt{n}} \right) \frac{\cos nx}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$ egyenletesen konvergens!

Pótfeladat:

8. Feladat (15 pont)

Milyen leképezést hoz létre az $f(z) = 2iz + i + 3$ függvény? Mibe viszi a $|z| \leq 1$ illetve a $\operatorname{Re} z >)$ tartományokat? Mutassa meg, hogy f valós és képzetes része kielégíti a Cauchy–Riemann parciális differenciálegyenlet rendszert! Mi következik ebből?

ANALÍZIS(1) **II. ZÁRTHELYI** **1998. április 23.**

Műszaki Informatika szak B csoport Munkaidő: 90 perc

BME, Természet- és Társadalomtudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. Feladat (17 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y''' + 9y' = 3x^2$$

2. Feladat (16 pont)

$$g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

a) Milyen feltételnek kell a $g(x,y)$ és $h(x,y)$ függvényeknek megfelelniük, hogy a nem egzakt differenciálegyenlet $\mu(x-y^2)$ multiplikátorral szorozva egzakt legyen?

b) Alkalmazza eredményét az alábbi differenciálegyenletre, és határozza meg a multiplikátort:

$$\left(6x + 6y - 2y^2\right)\mathrm{d}x - \left(8xy + 15y^2 - 3x\right)\mathrm{d}y = 0$$

(Ne oldja meg az egzakt differenciálegyenletet!)

3. Feladat (12 pont)

$$f(n) \le f\left(\frac{n}{3}\right) + O(\sqrt{n}) \qquad f(1),\ f(2)\ \text{adott}$$

Az $n = 3^k$ részsorozat segítségével adjon sejtést a számsorozat nagyságrendjére! (Nem kell bebizonyítani!)

4. Feladat (15 pont)

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{2x} + \frac{\sin^2\left(n^3x^2\right)}{\sqrt{2n^2+3}}$$

a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = ?$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = ?$

5. Feladat (18 pont)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+3)\, x^k}{4^{k-1}}$$

a) Adja meg a sor konvergenciatartományát!
b) Adjon meg egy olyan intervallumot, ahol a sor egyenletesen konvergens!
c) Adja meg a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+3)\,(x+1)^{2k}}{4^{k-1}}$ sor konvergenciatartományát!

6. Feladat (16 pont)

$$f(x) = \sqrt[4]{16+3x^4} \qquad f^{(11)} = ?\,, \qquad f^{(12)} = ?\,, \qquad R = ?$$

(A deriváltakat szorzatalakban adja meg!)

7. Feladat (16 pont)
Fejtse Taylor sorba az alábbi függvényeket, és adja meg a sorok konvergenciatartományát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-5} \qquad x_0 = +3$
b) $g(x) = e^{3x} \qquad x_0 = -1$

Pótfeladat:

8. Feladat (15 pont)

$$\left(2xe^{2y} + 6x + y \cdot \cos xy\right) dx + \left(2x^2 e^{2y} - 6 + x \cdot \cos xy\right) dy = 0 \qquad y(1) = 0, \qquad y(x) = ?$$