

1. feladat (18 pont)

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{y \ln^2(y)}{x^2 - 2x - 3}$$

2. feladat (20 pont)

Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$y' - \frac{2y}{x+4} = e^x(x+4)^3 \quad (x \neq -4), \quad y(-3) = 2$$

3. feladat (22 pont)

Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y''' + 4y'' + 3y' = 10e^{2x} + 18x$$

4. feladat (8+8+8=24 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln^2(n+1)} \quad b) \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n^2+1}{n^2+2} \right)^{n^3} \quad c) \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n^2+1}{n^2+2} \right)^{n^3} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

5. feladat (6+10=16 pont)

a) Mikor nevezünk egy numerikus sort abszolút konvergenseknek? Mi a kapcsolat egy sor konvergenciája és abszolút konvergenciája között?

b) Konvergense-e a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^+} (-1)^n \frac{n!}{(2n+1)n^n}$$

numerikus sor?

IMSc feladat (15 IMSc pont) Adjunk példát olyan pozitív tagú konvergens sorra, amelynek konvergenciáját a hányadoskritériummal nem tudjuk eldönteni, a gyökkritériummal viszont igen. Indokoljunk!

(Segítség: keressünk olyan $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ numerikus sort, amelyre teljesülnek a $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$,

$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ és $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ egyenlőtlenségek.)