

Vizsgadolgozat

1. Hókuszpók egy törpcsapdával 1 és 2 cm közötti törpöt szeretne fogni, hogy azt fogyaszthassa koktélpáradicsom helyett a reggeli mellé. A csapdával egyszerre csak egy törpöt tud elkapni. A kifogott törp magasságának (cm-ben vett) sűrűségfüggvénye: $f(x) = \frac{x}{4}$, ha $1 \leq x \leq 3$, és 0 egyébként. Jelölje A , B és C rendre azon eseményeket, hogy az első, második illetve harmadik alkalommal kifogott törp megfelelő méretű. Tegyük fel, hogy ezek az események együttesen függetlenek. Határozzuk meg $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ -t.

2. Legyen $c > 0$ valós szám, és X olyan folytonos valószínűségi változó, aminek eloszlásfüggvénye

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq c, \\ \ln(x) - \ln(c) & \text{ha } c < x \leq ce, \\ 1 & \text{ha } ce < x, \end{cases}$$

ahol e nem ismeretlen, hanem az Euler-féle konstans, $\approx 2,718$.

a) Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X) = e - 1$. Határozzuk meg c -t.

b) Határozzuk meg X szórásnégyzetét.

3. Babett egy cégnél IT hardware support feladatot lát el. Tegyük fel, hogy minden nap 18 problémát old meg. Egy probléma lényeges, ha nem oldható meg az adott készülék újraindításával. Az egyes problémák egymástól függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel lényegesek.

a) Milyen eloszlású az 1 nap alatt megoldott lényeges problémák száma?

b) Közelítőleg mi a valószínűsége, hogy 100 nap alatt 580-nál több, de 620-nál kevesebb lényeges problémát kell megoldania? (Az egyes napokon fellépő lényeges problémák darabszámai egymástól függetlenek.)

4. Legyen $X \sim \text{Exp}(1)$ valószínűségi változó. Az X kiértékelése után választunk egy Y számot a $[0; e^X]$ intervallumon egyenletesen.

a) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y < X \mid X = x)$ feltételes valószínűséget.

b) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y < X)$ valószínűséget.

5. Legyen $(X, Y) \sim N(\underline{0}, \underline{\Sigma})$ kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó, ahol

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Milyen $c > 0$ valós számot válasszunk, hogy $\text{corr}(X + cY, X - 2cY) = 0$ teljesüljön?

b) Tegyük fel, hogy c teljesíti az a) feladat feltételét. Független lesz-e ekkor $X + cY$ és $X - 2cY$? Indokoljunk!

6.* Legyenek X_1, X_2 független, $\text{Exp}(1)$ eloszlású valószínűségi változók, és jelölje Y az $X_1 + X_2$ valószínűségi változót. Adjuk meg $\mathbb{E}(X_1 + 2X_2 \mid Y)$ -t.

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítjük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

