# Villamosmérnök A2 (2015 tavasz) 1. szigorlat

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

**1.** $\iiint_V y^2 + z^2 \, dxdydz =$? ha $V$ az $x^2 + y^2 = 1$ alapkörű henger $z = -1$ és $z = 1$ síkok közé eső része.

**Megoldás.** Hengerkoordinátákra való áttéréssel: $\iiint_V y^2+z^2 \, dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_0^1 r(r^2\cos^2\varphi + z^2) \, drdzd\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\cos^2\varphi + \frac{1}{2}z^2 \, dzd\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos^2\varphi + \frac{1}{3} \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(1+\cos 2\varphi) + \frac{1}{3} \, d\varphi = \frac{7}{12}\varphi + \frac{1}{8}\sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{7}{6}\pi$. (Az integrál felírása és kiszámolása 5-5 pont.)

**2.** Konvergensek-e a következő sorok? (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^2+6}{5^n+1}$

**Megoldás.** (a) Igen, a majoráns-kritérium miatt, mert $\frac{1}{n\sqrt{n}} \le \frac{1}{n^2}$ (ha $n \ge 4$) és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens. (4p)
(b) Igen, mert $\frac{3^n+n^2+6}{5^n+1} \sim \left(\frac{3}{5}\right)^n$ (mert $\frac{3^n+n^2+6}{5^n+1}\frac{5^n}{3^n} = \frac{1+n^2/3^n+6/3^n}{1+1/5^n} \to 1 \in \mathbb{R}^+$) és $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ konvergens mértani sor. (6p)

**3.** (a) Mi a konvergenciasugara a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ sornak? (b) Mi a konvergenciatartománya? (c) Számolja ki az összegfüggvény értékét a $-\frac{1}{2}$ helyen $\frac{1}{30}$-ad pontossággal!

**Megoldás.** (a) A konvergenciasugár $\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1/\sqrt{n}}} = \frac{1}{\lim 1/\sqrt[2n]{n}} = 1.$
(b) $(-1,1) \subseteq$ konvergenciatartomány $\subseteq [-1,1]$ (a) miatt; $-1$-ben $\frac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$ miatt Leibniz-sor, tehát konvergens, 1-ben viszont $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ divergens $1/2 < 1$ miatt. Tehát a konvergenciatartomány $[-1,1)$.
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1/2)^n}{\sqrt{n}}$ Leibniz-sor, tehát a hiba kisebb, mint az első elhagyott tag abszolútértéke: $|a_4| = \frac{1}{32} < \frac{1}{30}$, tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1/2)^n}{\sqrt{n}} \sim -\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{8\sqrt{3}}$.

**4.** (a) Fejezze ki az $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & a & b \end{pmatrix}$ mátrix rangját $a$ és $b$ függvényében! (b) Invertálható-e $\underline{\underline{A}}$ ha $a = 7$, $b = 10$, és ha igen, mi az inverze?

**Megoldás.** $\underline{\underline{A}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a-6 & b-9 \\ 0 & 0 & a-6 \end{pmatrix}$, tehát ha $a = 6$, akkor a rang 2 (ha $b \neq 9$, mert akkor az első és harmadik oszlop lineárisan független, de a második előáll az ő lineáris kombinációjukként) ill. 1 (ha $b = 9$), ha pedig $a \neq 6$, akkor 3 (mert az oszlopok lineárisan függetlenek).
(b) Invertálható, mert (a) szerint ilyenkor a rangja 3; és $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**5.** Határozza meg az $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat!

**Megoldás.** A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet $0 = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda$ gyökei, azaz 0 és 5.
A 0-hoz tartozó sajátvektorok $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ magtere, azaz $c\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, az 5-höz tartozó sajátvektorok pedig $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ magtere, azaz $c\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**6.** (a) Igazolja, hogy a $\sum a_n$ nemnegatív tagú sor pontosan akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata felülről korlátos.
(b) Igazolja, hogy ha $\lambda$ sajátértéke az $A$ lineáris transzformációnak, akkor $\lambda^2$ sajátértéke $A^2$-nek.

Igazak-e az alábbi állítások?
(c) Ha egy $n$-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer mátrixának rangja $n$, akkor az

egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.
(d) Ha egy $n \times n$-es mátrix minden sorát megszorozzuk a $c$ skalárral, akkor determinánsának értéke is $c$-szeresére változik.
(e) Ha $f_n$ egyenletesen tart a konstans 0 függvényhez az $[a, b]$ intervallumon, akkor $\sum f_n$ egyenletesen konvergens $[a, b]$-n.

**Megoldás.** (a) A feltétel miatt $s_n$ monoton nő, tehát pontosan akkor konvergens, ha korlátos.
(b) Ha $x$ $A$ egy sajátvektora $\lambda$ sajátértékkel, akkor $A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda^2 x$, azaz $x$ sajátvektora $A$-nak $\lambda^2$ sajátértékkel.
(c) Ellenkezőleg: ilyenkor *csak* triviális megoldás van.
(d) Nem: ha egy sorát szorozzuk $c$-vel, akkor változik $c$-szeresére, tehát ha minden sorát $c$-vel szorozzuk, akkor $c^n$-szeresére változik.
(e) Nem, pl. $x/n$ egyenletesen tart a konstans 0 függvényhez $[0, 1]$-en ($|r_n(x)| = x/n \le 1/n \to 0$), de $\sum_{n=1}^{\infty} x/n$ nem is konvergens $[0, 1]$-en.

## Villamosmérnök A2 (2015 tavasz) — 2. szigorlat

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

**1.** $\iint_V \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = ?$ ha $V$ a $z=0$ sík $x=2$, $y=1/x$ és $y=x$ egyenletű görbék által határolt része.

**Megoldás.** $\iint_V \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int_1^2\int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2}\,dydx = \int_1^2 x^3 - x\,dx = 9/4$. (Az integrál felírása 6, a kiszámolása 4.)

**2.** Konvergensek-e a következő sorok? (a) $\sum_{n=1}^\infty \ln(1+\frac{1}{n})$ (b) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln^3(n)}$

**Megoldás.** (a) Nem, mert $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{1/n} \to 1$ miatt $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim 1/n$ és $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ divergens. (4p)
(b) Kondenzációs kritériummmal: $\frac{1}{n\ln^3(n)} \searrow 0$ miatt $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln^3(n)}$ konvergens, ha $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\ln^3(2^k)}$ az. De $\frac{1}{\ln^3(2^k)} = \frac{1}{k^3\ln^3 2} \leq \frac{1}{k^3}$ és mert $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3}$ konvergens, $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\ln^3(2^k)}$, és így $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln^3(n)}$ is az. (6p)

**3.** Legyen $f_n(x) = \frac{4^{nx}}{3^{nx}+5^{nx}}$. (a) Hol konvergens és mi a határfüggvénye $f_n$-nek? (b) Egyenletesen konvergens-e $f_n$ a konvergenciatartományán? (c) Egyenletesen konvergens-e $f_n$ a $(0,\infty)$ intervallumon?

**Megoldás.** (a) $f_n(0) = \frac{1}{2}$ és $x \neq 0$-ra $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, mert $x > 0$-ra $f_n(x) = \frac{((4/5)^x)^n}{((3/5)^x)^n+1} \to 0$ és $x < 0$-ra $f_n(x) = \frac{((4/3)^x)^n}{1+((5/3)^x)^n} \to 0$. Tehát $f_n$ konvergens $\mathbb{R}$-en, és a határfüggvénye $f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{ha } x = 0 \\ 0 & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$. (4p)
(b) Nem, mert $f_n$ folytonos minden $n$-re, de határfüggvényének szakadása van 0-ban. (2p)
(c) Nem, mert $x_n = 1/n$-re $|r_n(x_n)| = \frac{1}{2} \not\to 0$. (4p)

**4.** Legyen az $A$ lineáris transzformáció mátrixa az $e = (e_1, e_2)$ bázisban $\underline{\underline{A}}_e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, és legyen $f = (e_1+e_2, e_1-e_2)$. Írja fel $A$ mátrixát az $f$ bázisban!

**Megoldás.** $\underline{\underline{I}}_{fe} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ (2p), $\underline{\underline{I}}_{ef} = \underline{\underline{I}}_{fe}^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ (4p), és így $\underline{\underline{A}}_f = \underline{\underline{I}}_{ef}\underline{\underline{A}}_e\underline{\underline{I}}_{fe} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (4p).

**5.** Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 7 & -2 & -22 \\ 3 & -1 & -10 \end{pmatrix}$, $A$ pedig az $\underline{\underline{A}}$ által definiált lineáris transzformáció ($A\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{x}}$). Mutassa meg, hogy $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ eleme $A$ képterének és adja meg $A$ magterét!

**Megoldás.** $\underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ pontosan akkor eleme a képtérnek, ha az $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}}$ egyenletrendszer megoldható (2p). Az egyenletrendszer kibővített mátrixa Gauss-elimináció után: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ (3p), amiből az inhomogén egy partikuláris megoldása $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, speciálisan $\underline{\underline{b}} \in \operatorname{Im} A$ (2p). $\operatorname{Ker} A$ pedig a homogén általános megoldása: $c\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ (3p).

**6.** Melyek igazak az alábbi állítások közül?
(a) Ha az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix invertálható, akkor minden $n$-dimenziós oszlopvektor felírható $\underline{\underline{A}}$ elemeinek lineáris kombinációjaként.
(b) Ha $A$ lineáris transzformáció a $V$ téren, és $X \subseteq V$ lineárisan független, akkor $X$ $A$ szerinti képe ($\{Ax : x \in X\}$) is lineárisan független.
(c) Ha $A$ lineáris transzformáció a $V$ téren, és $X \subseteq V$ lineárisan összefüggő, akkor $X$ $A$ szerinti képe ($\{Ax : x \in X\}$) is lineárisan összefüggő.
(d) Ha $f_n \longrightarrow f$ egyenletesen és $f_n$ deriválható, akkor $f$ is az és $f_n' \longrightarrow f'$.
(e) Ha $x$ határpontja $X \subseteq \mathbb{R}^n$-nek, akkor torlódási pontja is.

**Megoldás.** (a) Az állítás ekvivalens azzal, hogy minden $\underline{b}$ $n$-dimenziós oszlopvektorra az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ egyenlet megoldható; és ez igaz, mert $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$ megoldás. (Vagy: $\underline{\underline{A}}$ pontosan akkor invertálható, ha $\underline{\underline{A}}$ rangja $n$, ami pontosan akkor igaz, ha az oszlopai generálják az $n$-dimenziós oszlopvektorok terét.)
(b) Nem, pl. ha $A$ a síkon az $x$-tengelyre való vetítés és $X$ a sík szokásos bázisa, akkor $X$ képe tartalmazza a nullvektort, tehát összefüggő.
?• (c) Igen: ha $0 = \sum c_i x_i$ nem-triviális lineáris kombináció, akkor $0 = A0 = \sum c_i A x_i$ is az.
(d) Nem, pl. $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$ egyenletesen tart a konstans 0 függvényhez (mert $|f_n(x)| \leq 1/n \to 0$), de $f_n'(x) = \cos nx \not\to 0' = 0$, pl. mert $\cos n0 = 1$.
(e) Nem, pl. véges halmaznak nincs torlódási pontja, de minden pontja határpontja.

# Villamosmérnök A2 (2015 tavasz) 3. szigorlat

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

**1.** Hol deriválható parciálisan, és hol deriválható az $f(x,y) = \begin{cases} y\sin(x/y) & \text{ha } y \neq 0 \\ 0 & \text{ha } y = 0 \end{cases}$ függvény?

**Megoldás.** Az $x$-tengelyen kívül deriválható (és ezért parciálisan is deriválható), mert ilyenekből van összetéve deriválhatóságot megőrző módon. $x$ szerint parciálisan deriválható, és a derivált 0 az $x$-tengelyen, mert ott a függvény konstans. (3p)
$f_y(x_0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \sin(x_0/y)$ ami csak akkor létezik, ha $x_0 = 0$, és olyankor 0. Tehát $f$ az $x$ tengelyen kívül és az origóban deriválható parciálisan (és az origóban mindkét parciális deriváltja 0). (3p)
$f$ még az origóban lehetne deriválható, de nem az, mert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)((x,y)-(0,0))}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$, mert $\lim_{x\to+0} \frac{f(x,x)}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to+0} \frac{x\sin 1}{\sqrt{2}x} = \frac{\sin 1}{\sqrt{2}} \neq 0$. (4p)

**2.** Konvergensek-e a következő sorok? (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln^n n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$

**Megoldás.** (a) Igen, gyökkritériummal: $\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} \to 0 < 1$. (5p)
(b) Igen, mert $\frac{\operatorname{tg}(\pi/n)}{1/n} = \frac{\pi}{\cos(\pi/n)} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \to \pi > 0$ miatt $\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \sim \frac{1}{n^2}$, és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens. (5p)

**3.** Számítsa ki $\int_0^1 \cos x^2 \, dx$ értékét 1/100 pontossággal!

**Megoldás.** $\cos x = \sum_0^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ mindenütt konvergens hatványsor, tehát $\cos x^2 = \sum_0^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$ is az, ezért minden zárt intervallumon egyenletesen konvergens, és így tagonként integrálható. (3p)

Ezért $\int_0^1 \cos x^2 \, dx = \sum_0^{\infty}(-1)^n \int_0^1 \frac{x^{4n}}{(2n)!} = \sum_0^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}\Big|_0^1 = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)}$ Leibniz-sor, így a hiba kisebb, mint az első elhagyott tag abszolútértéke. Pl. $n = 2$-re $\frac{1}{(2n)!(4n+1)} = \frac{1}{216} < \frac{1}{100}$, ezért $\int_0^1 \cos x^2 \, dx \approx 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$. (7p)

**4.** Adja meg az összes $\underline{\underline{x}}$ vektort, amire $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$, ahol $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -8 \end{pmatrix}$!

**Megoldás.** Gauss-elimináció után az egyenletrendszer kibővített mátrixa $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ (4p), amiből az inhomogén egy partikuláris megoldása $\underline{\underline{x}}_{ip} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2p), a homogén általános megoldása pedig: $\underline{\underline{x}}_{ha} = c\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2p), azaz a megoldás $\underline{\underline{x}}_{ia} = \underline{\underline{x}}_{ip} + \underline{\underline{x}}_{ha} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2p).

**5.** Legyen $A$ az $\mathbb{R}^3$-ben az $y$ tengely körüli $\pi/4$ szögű forgatás és $B = A^{100}$. Számítsa ki $B$ sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat!

**Megoldás.** $A^8$ az identitás, tehát $B = A^4$, azaz az $y$ tengelyre való tükrözés. Mátrixa a szokásos bázisban felírva $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (3p).

A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet $0 = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$ gyökei, azaz 1 és $-1$ (1p).

Az 1-hez tartozó sajátaltér $\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ magtere; $\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ a második és harmadik oszlop cseréjével, ezért a magtér $c\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ (vagyis az $y$-tengely), a $-1$-hez tartozó sajátvektorok pedig $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ magtere; $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ az első két oszlop cseréjével, ezért a magtér $c\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ (vagyis az $xz$-sík) (6p).

**6.** (a) Mi áll az $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ függvény Jacobi-mátrixa $i$. sorának $j$. oszlopában?
Melyek igazak az alábbi állítások közül?
(b) Ha $f$-nek létezik minden irányú iránymenti deriváltja $a$-ban, akkor parciálisan deriválható $a$-ban.
(c) Invertálható mátrixok összege is invertálható.
(d) Ha $\sum a_n(x+3)^n$ konvergens $-1$-ben, akkor $-4$-ben is.
(e) Ha $\limsup a_n = \infty$, akkor $\lim a_n = \infty$.

**Megoldás.** (a) $f$ $i$. koordináta-függvényének $j$. parciális deriváltja.
(b) Igen, mert a parciális deriváltak is iránymenti deriváltak.
(c) Nem, tetszőleges $\underline{\underline{A}}$ invertálható mátrixra $-\underline{\underline{A}}$ is az, de összegük (a nullmátrix) nem.
(d) Igen, mert $-3$ körüli hatványsor és konvergenciasugara $\geq 2$.
(e) Nem, pl. a $a_n = n$ és a konstans 0-sorozat összefésülése.

$A \subset \mathbb{R}$ $\quad |A| = n$ $\quad A = \{ i \in n \mid a_i \}$