ANALÍZIS(2) Műszaki Informatika szak | **I. ZÁRTHELYI** B kurzus | **2004. márc. 11.** Munkaidő: 90 perc

BME, TTK, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1) Feladat (12 pont). Adja meg az

$$y' = (\arcsin x)\ \ (y+3)^2$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

$y \equiv -3$ megoldás (1) $|x|<1$

$y \not\equiv -3$: $\int \frac{1}{(y+3)^2}\,dy = \int 1\cdot \arcsin x \, dx$ (3)

$u'=1 \quad v=\arcsin x$

$u=x \quad v'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (3)

$f' f^{-1/2}$

(2)

$\frac{(y+3)^{-1}}{-1} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}} + C$ (2) (1)

$\Rightarrow \quad y = -3 - \frac{1}{x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}$ ill. $y\equiv -3$, $|x|<1$

2) Feladat (15 pont). Határozza meg az

$$y' + y\,\mathrm{sh}\,x = e^{x-\mathrm{ch}\,x}$$

differenciálegyenlet $y(0)=1$ kezdeti értékhez tartozó megoldását!

$y_{iá} = y_H + y_{ip}$ (1)

$H: \quad y' + y\,\mathrm{sh}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y} = \int -\mathrm{sh}x\,dx$ ill. $y\equiv 0$

$\ln|y| = -\mathrm{ch}x + C_1 \Rightarrow |y| = e^{C_1}e^{-\mathrm{ch}x}$

$y = \pm e^{C_1}e^{-\mathrm{ch}x}$ ill. $y\equiv 0$: $y_H = C e^{-\mathrm{ch}x}$, $C\in\mathbb{R}$ (5)

$y_{ip} = c(x)\, e^{-\mathrm{ch}x}$ (1)

$y_{ip}' = c' e^{-\mathrm{ch}x} + c\, e^{-\mathrm{ch}x}(-\mathrm{sh}x)$

$I: \quad c' e^{-\mathrm{ch}x} + \cancel{c\, e^{-\mathrm{ch}x}(-\mathrm{sh}x)} + \cancel{c\, e^{-\mathrm{ch}x}\cdot\mathrm{sh}x} = e^x e^{-\mathrm{ch}x}$ (1)

$\Rightarrow c' = e^x$ (1) $\Rightarrow c(x) = e^x$ (1) $\Rightarrow y_{ip} = e^x e^{-\mathrm{ch}x}$ (1)

$y_{iá} = C\, e^{-\mathrm{ch}x} + e^x e^{-\mathrm{ch}x}$ (1)

$y(0)=1$: $\quad 1 = C e^{-1} + e^{-1} \Rightarrow C = e-1$ (2)

$y = (e-1)e^{-\mathrm{ch}x} + e^x e^{-\mathrm{ch}x}$ (1)

an2 zh1 04.03.11./1.

3) Feladat (23 pont).

$$y'' - 2y' + \alpha y = f(x)$$

Írja fel a fenti differenciálegyenlet általános megoldását, ha:

a) $\alpha = 5$ és $f(x) = 9e^x - 5x$,

b) $\alpha \le 1$ és $f(x) = 0$.

a.) $y'' - 2y' + 5y = 9e^x - 5x$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ (1) $\lambda_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm j4}{2} = 1 \pm j2$ (1)

$y_H = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$ (5) ; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{r|l} 5\cdot & y_{ip} = (Ae^x) + (Bx + C) \text{ (1)} + \text{(1)} \\ -2\cdot & y_{ip}' = Ae^x + B \\ 1\cdot & y_{ip}'' = Ae^x \end{array}$$

$e^x(5A - 2A + A) + 5Bx + 5C - 2B = 9e^x - 5x$ (3)

$4A = 9 \Rightarrow A = \frac{9}{4}$; $5C - 2B = 0$

$5B = -5 \Rightarrow B = -1$; $C = \frac{2}{5} B = -\frac{2}{5}$ (3)

$y_{ip} = \frac{9}{4} e^x - x - \frac{2}{5}$ (1)

$y_{ia}' = y_H + y_{ip} = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x + \frac{9}{4} e^x - x - \frac{2}{5}$ (1)

b.) $y'' - 2y' + \alpha y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + \alpha = 0$ $\lambda_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\alpha}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-\alpha}$ (2)

$\alpha = 1$: $\lambda_{1,2} = 1$ $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$ (2)

$\alpha < 1$: $\lambda_{1;2} = 1 \pm \sqrt{\underbrace{1-\alpha}_{>0}}$: 2 különböző valós gyök

$y = C_1 e^{(1+\sqrt{1-\alpha})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x}$ (2)

4) Feladat (12 pont). Írja fel a

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 5y \qquad \frac{dy}{dt} = x$$

differenciálegyenlet rendszer együttható mátrixának sajátértékeit, sajátvektorait valamint a differenciálegyenlet rendszer összes megoldását!

$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$

$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 5 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(-\lambda) - 5 = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ (2)

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -5$ (1)

$\lambda_1 = 1$

$\cancel{-5 \quad 5 \mid 0}$

$1 \quad -1 \mid 0$

$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3)

$\lambda_2 = -5$

$1 \quad 5 \mid 0$

$\cancel{1 \quad 5 \mid 0}$

$\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ (3)

$\underline{x} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3)

ak2 ah1 04.03.11/2.

5) Feladat (16 pont). Legyen

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x} + 2, \qquad x \geq 0$$

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = ?$
b) Egyenletesen konvergál-e az f_n az f-hez a $[0,2]$ intervallumon?
c) $||f_n - f|| = ?$, ha $x \in [2,6]$ (Uniform norma a $[2,6]$ intervallumon.)
Egyenletesen konvergál-e az f_n az f-hez a $[2,6]$ intervallumon?

a.) $f_n(0) = 2 \longrightarrow 2 = f(0)$

$x \neq 0$: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} + 2 = 3$

$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x = 0 \quad 1 \\ 3, & \text{ha } x > 0 \quad 2 \end{cases}$

1

b.) f_n-ek folytonosak 1 $[0,2]$-ön, de f nem folytonos $[0,2]$-ön $\Rightarrow$ nem egyenletes a konvergencia $[0,2]$-ön. 2

c.) $\|f_n - f\|_{[2,6]} = \sup_{x\in[2,6]} |f_n(x) - f(x)| =$ 2

$= \sup_{x\in[2,6]} |\sqrt[n]{x} - 1|$ 2 $= \sup_{x\in[2,6]} (\sqrt[n]{x} - 1) = \sqrt[n]{6} - 1$ 2

$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{[2,6]} = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{\sqrt[n]{6}}_{\searrow 1} - 1) = 0$ 1 $\Rightarrow$ egyenletes a konvergencia 1 a $[2,6]$ intervallumon. 1

6) Feladat (05 pont).
Írja le a hatványsor konvergencia sugarával kapcsolatban tanult állításokat!

(T)

Ha létezik a $\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor R konvergencia sugara:

$$R = \frac{1}{\alpha}, \quad \text{ha } \alpha > 0 \text{ véges}$$
$$R = \infty, \quad \text{ha } \alpha = 0$$
$$R = 0, \quad \text{ha } \alpha = \infty$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergens $(-R, R)$-en, divergens $|x| > R$-ben

(T)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor R konvergencia sugara:

$\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ „$R = \frac{1}{\alpha}$"

1. $R = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$, ha $\alpha > 0$ véges
2. $R = \infty$, ha $\alpha = 0$
3. $R = 0$, ha $\alpha = \infty$

an2 zh1 09.03.11./3.

7) Feladat (17 pont).
a) Írja le a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ függvénysor egyenletes konvergenciájának eldöntésére szolgáló, valamint a függvénysor összegfüggvényének diffferenciálhatóságára vonatkozó tételeket!
b) Diffferenciálható-e az alábbi függvénysor összegfüggvénye:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx+3)}{1+2^n}$$

Weierstrass kritérium
(Egy elégséges tétel függvénysor egyenletes konvergenciájára.)

T | Ha $\exists (b_k)$, hogy $|f_k(x)| \le b_k$; $x \in H$; $k = 0, 1, \ldots$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens numerikus sor, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens H-n. | 2

T3* | Ha $f_k \in C^1_{[a,b]}$ és $[a,b]$-n

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x) = g(x) \quad \text{és a konvergencia egyenletes}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = s(x) \quad \text{(pontonként konvergál),}$$

akkor s deriválható $[a,b]$-n, és $s' = g$. | 3

b.) $|f_n(x)| = \dfrac{|\cos(nx+3)|}{1+2^n} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (2) ; $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konv. geom. sor (1)

$\underset{\text{weierstr. kr.}}{\Longrightarrow}$ $\sum_1^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konv. $\mathbb{R}$-en (1) $\Rightarrow$ $\sum_1^{\infty} f_n(x)$ pontonkéut konv. $\mathbb{R}$-en (1)

$f_n'(x) = -\dfrac{\sin(nx+3)\cdot n}{1+2^n}$ (1)

$|f_n'(x)| < \dfrac{n}{2^n} = b_n$ (1) $\quad \sum_{}^{\infty} b_n$ konvergens, mert

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} = \dfrac{1}{2} < 1$ (3) $\underset{\text{weiersstr. kr.}}{\Longrightarrow}$ $\sum_1^{\infty} f_n'(x)$ egyenletesen konv. $\mathbb{R}$-en (1)

És $f_n \in C^1_{\mathbb{R}}$
A feltételek teljesülnek $\Longrightarrow$ az összegfv. deriválható. (1)

an2 zh1 04.03.11/4.

CSAK A KETTESÉRT JAVÍTJUK KI!

8) Feladat (10 pont). Az $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása az alábbi differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy a $(0,0)$ ponton.

$$y' = 2x^2 + 7y^2$$

Van-e ennek a megoldásnak inflexiója az $x = 0$ helyen?

$y(0)=0$ $\quad y'(0)= 0+0=0$ (1)

$y'' = 4x + 7\cdot 2y\cdot y'$ (2) $\Rightarrow y''(0)=0$ (1) lehet infl. pont

$y''' = 4 + 14y'\cdot y' + 14y\,y''$ (3) $\Rightarrow y'''(0)=4 \neq 0$ (1)

Tehát a $(0,0)$ ponton áthaladó megoldásnak inflexiója van ebben a pontban $\{y''(0)=0,\ y'''(0)\neq 0\}$.

(2)

an2 zh1 04.03.11/5.