ANALÍZIS(2) — Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2011. dec. 19. — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (15 pont)

a) Írja fel az n-edrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakját és a hozzá tartozó karakterisztikus egyenletet!

b)

$$y'' - 2y' + 5y = -25x + 10e^{2x}, \qquad y(x) = ?$$

a) $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$ (2) $a_i \in \mathbb{R}$

($a_n = 1$ is választható)

A karakterisztikus egyenlet:

$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ (2)

b.) (H): $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \ \ldots \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm j2$

$y_H = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$ (5) $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$5\cdot \mid y_{ip} = Ax + B + Ce^{2x}$

$-2\cdot \mid y'_{ip} = A + 2Ce^{2x}$

$1\cdot \mid y''_{ip} = 4Ce^{2x}$

$5Ax + (5B - 2A) + e^{2x}(5C - 4C + 4C) = -25x + 10e^{2x}$

$5A = -25 \Rightarrow A = -5$; $5B - 2A = 0 \Rightarrow B = -2$

és $5C = 10 \Rightarrow C = 2$

$y_{ip} = -5x - 2 + 2e^{2x}$ (5)

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = \ldots$ (1)

2. feladat (11 pont)

Adja meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+2}}{2^{3n}\, n} \quad (x-1)^n$$

Adjon meg egy olyan intervallumot, melyben a sor egyenletesen konvergens!

an2v 111219/1

Hatványsör: $a_n = \frac{(-2)^n \cdot 4}{8^n \cdot n} = (-1)^n \frac{4}{4^n \cdot n}$; $x_0 = 1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{4}}{4 \cdot \sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4} = \alpha \quad 4 \qquad R = \frac{1}{\alpha} = 4 \quad 1$$

Végpontok:

$-3 \quad x_0 = 1 \quad 5$

$$x = -3: \quad \sum^{\infty} (-1)^n \frac{4}{4^n \cdot n} (-4)^n = 4 \sum^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{div.}$$

$$x = 5: \quad \sum^{\infty} (-1)^n \frac{4}{4^n \cdot n} 4^n = 4 \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{konv. (Leibniz sor)}$$

K. T.: $(-3, 5]$ 4

Pl. $[-1, 0] \subset (-3, 5) \Rightarrow [-1, 0]$-ban egyenletesen konv. 2

3. feladat (10 pont)

a) $\binom{1/5}{4} = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

b)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16 - 8x^2}}$$

Adja meg az f függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

a.) $\boxed{2}$ $\binom{1/5}{4} = \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)\left(-\frac{14}{5}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

b.) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} \frac{1}{\sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{4}} =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \binom{-1/4}{n} x^{2n} \quad 5$$

$$\left| -\frac{x^2}{2} \right| = \frac{|x|^2}{2} < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{2} \quad 3$$

4. feladat (14 pont)

$$f(x, y) = e^{x(y-5)}$$

a) Hol totálisan deriválható az f függvény? (Indokoljon!)

b) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, $\quad P_0(1, 6)$, $\quad \underline{e} \parallel 4\underline{i} - 3\underline{j}$

c) Van-e f-nek lokális szélsőértéke az $(1, 5)$ pontban?

an2v 112119/2.

a.) $\boxed{6}$

$f'_x = (y-5)\,e^{x(y-5)}$ (2)

$f'_y = x\,e^{x(y-5)}$ (2)

f'_x, f'_y mindenütt létezik és folytonos, ezért f mindenütt totálisan deriválható. (2)

b.) $\boxed{5}$

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\cdot \underline{e}$ (2)

$\underline{v} = 4\underline{i} - 3\underline{j}$, $|\underline{v}| = \sqrt{16+9} = 5 \Rightarrow \underline{e} = \frac{4}{5}\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j}$ (1)

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = (e\,\underline{i} + e\,\underline{j})\left(\frac{4}{5}\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j}\right) = e\frac{4}{5} + e\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{e}{5}$ (2)

c.) $\boxed{3}$

$f'_x(1,5) = 0$

$f'_y(1,5) = 1 \neq 0 \Rightarrow (1,5)$-ben nincs lokális szélsőérték, mert nem teljesül a szükséges feltétel.

5. feladat (9 pont)

Legyen $P_0 = (x_0, y_0)$ belső pontja az $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának!

a) Mit értünk azon, hogy f totálisan deriválható P_0 -ban?
b) Mit értünk azon, hogy $f \in C^2_{K_{P_0}}$?
c) Hogyan számoljuk ki $d^2 f(P_0, (h,k))$ értékét? (A mátrixos alakot írja fel!)

a.) (D) $\boxed{4}$ f totálisan deriválható P_0-ban, ha a függvényérték megváltozása előállítható az alábbi alakban:

$\Delta f = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = A\cdot h + Bk + \varepsilon_1\cdot h + \varepsilon_2 k$,

ahol A, B független h-tól, k-tól és $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0$ és $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$

(Vagy: $\Delta f = \underline{A}\cdot\underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}$: $\underline{A}$ független $\underline{h}$-tól, és $\lim\limits_{\underline{h}\to\underline{0}} \underline{\varepsilon}(\underline{h}) = \underline{0}$)

an20111219/3.

b.) (2) (D) $f \in C^2_{K_{P_0}}$: f parciális deriváltjai másodrenddel bezárólag léteznek és folytonosak K_{P_0}-ban.

c.) (3) $d^2 f(P_0,(h,k)) = [h \;\; k] \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}_{P_0} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$

6. feladat (16 pont)*

a) Írja le polárkoordinátákkal a T tartományt!

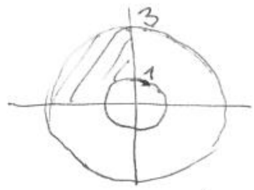
$$T = \{(x, y): \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\,; \quad x \leq 0\,; \quad y \geq 0\}$$

b) Írja fel a Jacobi determinánst polártranszformáció esetére és határozza meg az értékét!

c)

$$\iint_T \frac{1}{(2x^2 + 2y^2 + 3)^7}\, dT = ?$$

a.) $\boxed{4}$ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (2) $\quad 1 \leq r \leq 3$, $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ (2)



b.) $\boxed{5}$ $\mathcal{J} = \det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$

$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$

c.) $\boxed{7}$ $\displaystyle\int_1^3 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{(2r^2+3)^7} \underbrace{r}_{|\mathcal{J}|}\, d\varphi\, dr =$ (3)

$\displaystyle = \underbrace{\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)}_{(1)} \frac{1}{4} \int_1^3 \underbrace{4r}_{f'} \underbrace{(2r^2+3)^{-7}}_{f^{-7}} dr = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}\, \frac{(2r^2+3)^{-6}}{-6}\Bigg|_1^3 =$

$\displaystyle = -\frac{\pi}{48}\left(\frac{1}{21^6} - \frac{1}{5^6}\right)$ (3)

an2 v 111219/4.

7. feladat (15 pont)*

a) Definiálja az e^z függvényt!
Mutassa meg, hogy $(e^z)' = e^z$, ha $z \in \mathbb{C}$!

b) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

$b1)\quad e^z = 0 \qquad\qquad b2)\quad e^{3z} = je$

a.) $\boxed{8}$ (D) $e^z := e^x(\cos y + j \sin y)$ (2)

(6)

$u(x,y) = e^x \cos y$
$v(x,y) = e^x \sin y$ } parciálisok léteznek és folytonosak $\Rightarrow$ u, v tot. deriválhatók

C-R:

$u'_x = e^x \cos y \,;\; v_y = e^x \cos y \qquad u'_x \equiv v'_y$

$u'_y = -e^x \sin y \,;\; v_x = e^x \sin y \qquad u'_y \equiv -v'_x$

$\Rightarrow$ $f(z) = e^z$ mindenütt deriválható és

$f'(z) = u'_x + j v'_x = e^x \cos y + j e^x \sin y = e^z$

b.) $\boxed{7}$ b1) $e^z = 0$ nincs megoldás ($|e^z| = e^x > 0$ mindig) (2)

b2) $e^{3z} = je \Rightarrow 3z = \operatorname{Ln} je = \ln e + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$\Rightarrow z = \frac{1}{3}\left(1 + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$ (5)

8. feladat (10 pont)*

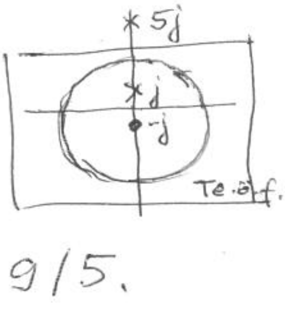
$$I = \oint\limits_{|z+j|=3} \left(e^{j\pi z} + \frac{\operatorname{sh} 2z}{(z-j)\,(z-5j)} \right) dz\,, \qquad \operatorname{Re} I = ?\,, \qquad \operatorname{Im} I = ?$$

$I = \oint\limits_{|z+j|=3} e^{j\pi z} + \oint\limits_{|z+j|=3} \frac{\operatorname{sh} 2z}{(z-j)(z-5j)}\, dz = I_1 + I_2$

$I_1 = 0$, mert $e^{j\pi z}$ mindenütt reguláris, így a Cauchy-féle alaptétel miatt az integrál $= 0$. (3)

$\frac{\operatorname{sh} 2z}{z-5j}$ – reg T-n

$I_2 = \oint\limits_{|z+j|=3} \frac{\frac{\operatorname{sh} 2z}{z-5j}}{z-j}\, dz = 2\pi j \left.\frac{\operatorname{sh} 2z}{z-5j}\right|_{z=j} =$ (5)



$= 2\pi j \frac{\operatorname{sh} 2j}{-4j} = -j\frac{\pi}{2} \sin 2$ (1)

$\operatorname{Re} I = 0, \quad \operatorname{Im} I = -\frac{\pi}{2} \sin 2$ (1)

an2v 111219/5.

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (9 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet! (Elég az implicit alak.)

$$y' = (2y + 6)^3 \; x^2 \, e^{x^3}$$

Szeparábilis de.

$y \equiv -3$ mo. 2

Ha $y \neq -3$

$\int \frac{1}{(2y+6)^3} \, dy = \int x^2 e^{x^3} dx$ 2

$\frac{1}{2} \int 2\,(2y+6)^{-3} dy = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx$

$\frac{1}{2} \frac{(2y+6)^{-2}}{-2} = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$

2 2 1

10. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorfejtését és adja meg annak konvergencia tartományát!

$$f(x) = \cos(2x^3), \qquad g(x) = \frac{1}{3 - 9x^2}$$

$f(x) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \dots \Big|_{u=2x^3} =$

$= 1 - \frac{2^2}{2!} x^6 + \frac{2^4}{4!} x^{12} - \frac{2^6}{6!} x^{18} + \dots$ 4 K.T.: $(-\infty, \infty)$ 1

$g(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 3x^2} = \frac{1}{3}\left(1 + 3x^2 + 3^2 x^4 + 3^3 x^6 + \dots\right)$ 4

$q = 3x^2$

$|q| = |3x^2| = 3|x|^2 < 1 \Rightarrow |x|^2 < \frac{1}{3} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

K.T.: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 2

an2v 111219/6.