Matematika A1 1. Zárthelyi megoldása

2013. október 24.

1. Beugró feladat (5×2 pont)

   (a) $c = 7$

   (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

   (c) $\overline{(A \cup B)} \cap C = \{1, 5\}$

   (d) $x_{1,2} = 1 \pm i$

   (e) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (5, -5, 5)$

2. (a) (5 pont) Egy a komplex számsíkon elhelyezkedő szabályos háromszög középpontja az origó, egyik csúcsa $z_1 = 1 + i$. Adjuk meg a további csúcsait!
   Megoldás:
   A $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$-et kell az origó körül elforgatni $\pm 2\pi/3$-mal. A kapott csúcsok:

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}e^{i2\pi/3} = \sqrt{2}e^{i11\pi/12},$$
$$z_3 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}e^{-i2\pi/3} = \sqrt{2}e^{-i5\pi/12}.$$

   (b) (5 pont) Adjuk meg az összes olyan komplex számot, melynek az egyik hetedik gyöke megegyezik az egyik harmadik gyökével!
   Megoldás:
   Ha a keresett szám $z = re^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$, akkor a megoldandó egyenlet:

$$r^{1/7}e^{i\frac{\phi+2k\pi}{7}} = r^{1/3}e^{i\frac{\phi+2l\pi}{3}},$$

   ahol $k = 0, 1, \ldots, 6$, $l = 0, 1, 2$. Az $r^{1/7}7r^{1/3}$ egyenlőségből $r = 0$ vagy $r = 1$ adódik, míg a

$$\frac{\phi + 2k\pi}{7} = \frac{\phi + 2l\pi}{3}$$

   feltételből

$$\phi = \frac{3k\pi - 7l\pi}{2}.$$

Mivel $\phi \in [0, 2\pi)$, így $0 \leq 3k - 7l < 4$. Ez úgy lehet csak, ha $l = 0$ és $k = 0$ vagy 1, $l = 1$ és $k = 3$, vagy $l = 2$ és $k = 5$. Vagyis ϕ lehetséges értékei: $0, 3\pi/2, \pi, \pi/2$. A megoldások tehát:

$$z_1 = 1, z_2 = -i, z_3 = -1, z_4 = i, z_5 = 0.$$

3. (a) (6 pont) Legyen X egy nem üres halmaz. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A, B, C \subseteq X$ halmazokra fennáll, hogy$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.
Megoldás:

$$\begin{aligned}
(A \cap C) \setminus (B \cap C) &= (A \cap C) \cap \overline{(B \cap C)} = (A \cap C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{de Morgan} \\
&= (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (A \cap C \cap \overline{C}) && \text{disztributivitás} \\
&= (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (A \cap (C \cap \overline{C})) && \text{asszociativitás} \\
&= (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (A \cap \emptyset) = A \cap C \cap \overline{B} && \\
&= (A \cap \overline{B}) \cap C && \text{kommutativitás} \\
&= (A \setminus B) \cap C. &&
\end{aligned}$$

(b) (4 pont) Legyen $\mathbb{R}$ egy reláció az egész számok halmazán, ($\mathcal{R} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$). $m \,\mathcal{R}\, n$ akkor és csak akkor, ha $m + n$ páros szám. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{R}$ ekvivalenciareláció!
Megoldás:
$m \,\mathcal{R}\, m$, mert $2m$ páros (reflexív) és triviális, hogy szimmetrikus. A tranzitivitáshoz, ha $m \,\mathcal{R}\, n$ és $n \,\mathcal{R}\, k$, akkor $m + n$ és $n + k$ is páros, így az összegük $m + 2n + k$ is az. Ebből már látszik $m + k$ párossága, vagyis $m \,\mathcal{R}\, k$. Tehát $\mathcal{R}$ ekvivalenciareláció.

4. (10 pont) Tükrözzük az $A(2, 1, 0)$ pontot az

$$\frac{x - 7}{2} = 1 - y, \quad z = 5$$

egyenletrendszerű egyenesre. Milyen távolságra van a tükörkép az origón átmenő $\mathbf{n} = (1, 1, -1)$ normálvektorú síktól?
Megoldás:
Az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (2, -1, 0)$, így az A ponton áthaladó, az egyenesre merőleges S sík egyenlete: $2x - y - 3 = 0$. Az egyenes egyenletéből $y = (9 - x)/2$-t behelyettesítve S egyenletébe, megkaphatjuk az S sík és az egyenes metszéspontjának koordinátáit: $M(3, 3, 5)$. A tükörképet A'-vel jelölve

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'} = (1, 2, 5),$$

így A' koordinátáit megkaphatjuk:

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA'} = (3,3,5) + (1,2,5) = (4,5,10).$$

Az origón átmenő $\mathbf{n} = (1,1,-1)$ normálvektorú S' sík normálegyenlete: $(x+y-z)/\sqrt{3} = 0$, innen a kérdezett távolság:

$$d(A', S') = \frac{|4+5-10|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. (a) (3 pont) Legyenek A, B és C állítások. Bizonyítsuk be, hogy ha A-nak B, $\overline{A}$-nak pedig C szükséges feltétele, akkor C-nek $\overline{B}$ elégséges feltétele.
Megoldás:
B szükséges feltétele A-nak, vagyis $A \Rightarrow B$, ekvivalens módon $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (mivel mindkettő $\overline{A} \vee B$-vel azonos). Mivel $\overline{A}$-nak pedig C szükséges feltétele, ezért $\overline{A} \Rightarrow C$. A két feltételt összetéve: $\overline{B} \Rightarrow \overline{A} \Rightarrow C$, amit látni akartunk.

(b) (3 pont) Adjuk meg azon $x \in \mathbb{R}$ számok szuprémumát és infimumát, melyekre

$$\frac{|x-2|}{x} > x.$$

Megoldás:
Az egyenlőtlenségnek az $x \in (-\infty, -2) \cup (0,1)$ számok tesznek eleget, vagyis a szuprémum 1, az infimum pedig $-\infty$, vagyis nem létezik.

(c) (4 pont) Egy síkba esnek-e az $A(2,-1,4)$, $B(-1,0,3)$, $C(3,-1,0)$, $D(-1,2,-2)$ pontok?
Megoldás:
$\overrightarrow{AB} = (-3,1,-1)$, $\overrightarrow{AC} = (1,0,-4)$, $\overrightarrow{AD} = (-1,2,-2)$. A négy pont pontosan akkor van egy síkban, ha ezen vektorok komplanárisak, vagyis a vegyes szorzatuk 0. Itt azonban

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \det \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = -20 \neq 0,$$

vagyis a négy pont nem egysíkú.