ANALÍZIS 1. | **I. PÓTZÁRTHELYI** | **2013. november 7.**
Mérnök informatikus szak | B csoport | Munkaidõ: 90 perc

---

1. feladat (22 pont)
Határozza meg az alábbi határértékeket:

$$a)\ \left(\frac{2n^2-3}{3n^2+4}\right)^{2n^2+1} \qquad b)\ \left(\frac{3n^2+4}{2n^2+1}\right)^{2n^2-3} \qquad c)\ \left(\frac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{3n^2+4}.$$

---

a) $\dfrac{2n^2-3}{3n^2+4} = \dfrac{2-\frac{3}{n^2}}{3+\frac{4}{n^2}} \to \dfrac{2}{3}$ (**2p**), így $\varepsilon < \frac{1}{3}$, és $n \geq N$ esetén

$$\frac{2n^2-3}{3n^2+4} < \frac{2}{3} + \varepsilon < 1, \qquad \textbf{(2p)}$$

tehát

$$0 \leq \left(\frac{2n^2-3}{3n^2+4}\right)^{2n^2+1} \leq \left(\frac{2}{3}+\varepsilon\right)^{2n^2+1} \to 0, \qquad \textbf{(3p)}$$

vagyis a rendõrelv miatt a sorozat 0-hoz tart. (**1p**)

b) $\dfrac{3n^2+4}{2n^2+1} = \dfrac{3+\frac{4}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} \to \dfrac{3}{2}$, (**2p**), így $\varepsilon < \frac{1}{2}$, és $n \geq N$ esetén

$$\frac{3n^2+4}{2n^2+1} > \frac{3}{2} - \varepsilon > 1, \qquad \textbf{(2p)}$$

tehát

$$\left(\frac{3n^2+4}{2n^2+1}\right)^{2n^2-3} \geq \left(\frac{3}{2}-\varepsilon\right)^{2n^2-3} \to \infty,, \qquad \textbf{(3p)}$$

vagyis a speciális rendõrelv miatt a sorozat ∞-hez tart. (**1p**)

$$c)\ \left(\frac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{3n^2+4} \overset{\mathbf{4p}}{=} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1-\frac{3}{2n^2}\right)^{2n^2}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^4}{\left(1-\frac{3}{2n^2}\right)^4} \overset{\mathbf{2p}}{\to} \left(\frac{e}{e^{-3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 1 = e^6.$$

---

2. feladat (18 pont)
a) Adja meg a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ definícióját.
b) A definíció alapján lássa be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n-n^3} = -\infty$
c) Konvergens-e az $a_n = \dfrac{\sin n^2}{\sqrt[3]{n-n^3}}$ sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ha minden $M < 0$ esetén létezik olyan $N(M) \in \mathbb{N}$ szám, melyre $a_n < M$ ha $n \geq N(M)$ (**3p**)
b) Legyen $M < 0$, ekkor $\sqrt[3]{n-n^3} = \sqrt[3]{n(1-n^2)} < \sqrt[3]{1-n^2}$ (vagy $n \geq 2$ esetén $\sqrt[3]{n-n^3} < \sqrt[3]{\frac{n^3}{2}-n^3}$) (**3p**), vagyis elég ha

$$M > \sqrt[3]{1-n^2} \Leftrightarrow n \geq \sqrt{1-M^3}, \quad (\text{vagy } M > \sqrt[3]{-\frac{n^3}{2}}) \Leftrightarrow n > -\sqrt[3]{2}M),$$

(**4**p)

tehát $N(M) = [\sqrt{1-M^3}]$ (vagy $N(M) = \max(2, [-\sqrt[3]{2}M]))$.(**2p**)
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n-n^3} = -\infty$, így $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n-n^3}} = 0$, (**2p**) és $-1 \leq \sin n^2 \leq 1$ (**2p**), tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^2}{\sqrt[3]{n-n^3}} = 0. \qquad (\mathbf{2p})$$

---

3. feladat (14 pont)
Legyen $a_1 = 3$, és $n = 1, 2, ...$ esetén $a_{n+1} = \sqrt{7a_n - 10}$.
a) Igazolja, hogy $n = 1, 2, \ldots$ esetén $2 < a_n < 5$.
b) Bizonyítsa be, hogy az (a_n) sorozat monoton.
c) Konvergens-e az (a_n) sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) $2 < a_1 = 3 < 5$ (**2p**), és

$$\begin{aligned} 2 < a_n < 5 \quad &\Longrightarrow 14 < 7a_n < 35 \Longrightarrow 4 < 7a_n - 10 < 25 \\ &\overset{\mathbf{2p}}{\Longrightarrow} 2 < \sqrt{7a_n - 10} = a_{n+1} < 5. \end{aligned}$$

b) $a_2 = \sqrt{11} > 3 = a_1$ (**2p**), és

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} \quad &\Longrightarrow 7a_n < 7a_{n+1} \Longrightarrow 7a_n - 10 < 7a_{n+1} - 10 \\ &\overset{\mathbf{2p}}{\Longrightarrow} a_{n+1} = \sqrt{7a_n - 10} < \sqrt{7a_{n+1} - 10} = a_{n+2}. \end{aligned}$$

c) (a_n) monoton növõ és felülrõl korlátos, így konvergens (**2p**), vagyis van határértéke:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{7a_n - 10} = \sqrt{7A - 10},$$

tehát $A^2 - 7A + 10 = 0$, így $A = 2$ vagy $A = 5$ (**2p**), de mivel $a_n \geq 3$, így $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$ (**2p**).

4. feladat (18 pont)
Adja meg az

$$a_n = \sqrt[n]{3^{2n+1} + (-9)^n + 5} \qquad\qquad b_n = \frac{n! \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 5^n}{n2^n + 5^n}$$

sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz inferiorját, illetve limesz szuperiorját. Konvergensek-e a sorozatok?

Ha n páros $a_n = \sqrt[n]{3 \cdot 9^n + 9^n + 5} = \sqrt[n]{4 \cdot 9^n + 5}$, vagyis

$$9 \leftarrow 9\sqrt[n]{4} = \sqrt[n]{4 \cdot 9^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{4 \cdot 9^n + 5 \cdot 9^n} = 9\sqrt[n]{9} \to 9, \qquad (\mathbf{3p})$$

ha n páratlan $a_n = \sqrt[n]{3 \cdot 9^n - 9^n + 5} = \sqrt[n]{2 \cdot 9^n + 5}$, vagyis

$$9 \leftarrow 9\sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{2 \cdot 9^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{2 \cdot 9^n + 5 \cdot 9^n} = 9\sqrt[n]{7} \to 9. \qquad (\mathbf{3p})$$

Így a sorozat torlódási pontjainak halmaza: $\{9\}$, $\limsup a_n = 9 = \liminf a_n$, tehát a sorozat konvergens, és határértéke 9 (**2p**).

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{n! + 5^n}{n2^n + 5^n} = \dfrac{n!}{5^n} \cdot \dfrac{1 + \frac{5^n}{n!}}{n\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} > \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n!}{5^n} \overset{\mathbf{3p}}{\to} \infty, & n = 4k \\[2ex] \dfrac{-n! + 5^n}{n2^n + 5^n} = \dfrac{n!}{5^n} \cdot \dfrac{-1 + \frac{5^n}{n!}}{n\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} < -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n!}{5^n} \overset{\mathbf{3p}}{\to} -\infty, & n = 4k + 2 \\[2ex] \dfrac{5^n}{n2^n + 5^n} = \dfrac{1}{n\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} \overset{\mathbf{2p}}{\to} 1, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Így a sorozat torlódási pontjainak halmaza: $\{-\infty, 1, \infty\}$, $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = -\infty$, tehát a sorozat nem konvergens. (**2p**)

---

5. feladat (12 pont)
a) Definiálja a Leibniz-sor fogalmát, és ismertesse a numerikus sorokra vonatkozó Leibniz-kritériumot.
b) Igazolja, hogy a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ sor konvergens.
c) Adjon becslést az $s \approx s_{97}$ közelítés hibájára.

---

a) A $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ sor Leibniz-sor, ha $a_n > 0$, $a_n \to 0$, és $a_n > a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A Leibniz-sorok konvergensek. (**3p**)
b) $0 < \sqrt{n+2}$, az $\sqrt{n}$ részsorozata, így monoton növõen ∞-hez tart, tehát a reciproka 0-hoz tart monoton csökkenõen, így a sor Leibniz sor, tehát konvergens. (**6p**)
c) $|s - s_{97}| < \frac{1}{\sqrt{98+2}} = \frac{1}{10}$. (**3p**)

---

6. feladat (16 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 2^{2n}} \qquad\qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+3n+8}}.$$

---

a) $0 \leq \frac{3^n}{2^n + 2^{2n}} \leq \frac{3^n}{2^{2n}} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ (**3p**), és $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$, így $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ sor konvergens (**3p**), így a majoráns-kritérium alapján az eredeti sor is konvergens. (**2p**)
b) $1 \leftarrow \sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[n]{n^2+3n+8} \leq \sqrt[n]{n^2+3n^2+8n^2} = \sqrt[n]{n^2}\sqrt[n]{12} \to 1$ (**4p**), így

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+3n+8}} \to 1 \neq 0, \qquad (\mathbf{2p})$$

vagyis nem teljesül a sorok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltétel, így a sor divergens (**2p**).