# Villamosmérnök A3 (2017 ősz) 1. pótpót ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

**1.** Oldja meg az $xyy' = x^2 + 1$ differenciálegyenletet!

**Megoldás.** Szétválasztható változójú: $xy\frac{dy}{dx} = x^2 + 1 \rightsquigarrow \int y\ dy = \int x + \frac{1}{x}\ dx \rightsquigarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + c$, amiből $y = \pm\sqrt{x^2 + \ln x^2 + c}$.

**2.** Oldja meg az $3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$ differenciálegyenletet pozitív $x$-ekre!

**Megoldás.** Nem egzakt, mert $P(x, y) = 3xy + y^2$, $Q(x, y) = x^2 + xy$-nal $P_y = 3x + 2y \neq 2x + y = Q_x$, de $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{x+y}{x^2+xy} = \frac{1}{x}$, tehát az $e^{\int 1/x\ dx} = e^{\ln|x|} = |x| = x$-el való szorzással kapott $3x^2y + y^2 + (x^3 + x^2y)y' = 0$ már az. Kell $u(x, y)$, amire $u_x(x, y) = 3x^2y + y^2$ és $u_y(x, y) = x^3 + x^2y$.

Az elsőből $u(x, y) = \int 3x^2y + y^2\ dx = x^3y + xy^2 + c(y)$; ebből és a másodikból $x^3 + x^2y = u_y(x, y) = x^3 + 2xy + c'(y) \rightsquigarrow c'(y) = x^2y - 2xy \rightsquigarrow c(y) = \frac{1}{2}(xy)^2 - xy^2 + c \rightsquigarrow u(x, y) = x^3y + \frac{1}{2}(xy)^2 + c$, vagyis a megoldás $x^3y + \frac{1}{2}(xy)^2 = c$.

**3.** Oldja meg az $y'' - 2y' + y = \sin t$ differenciálegyenletet!

**Megoldás.** $y_{ha}$: a karakterisztikus egyenletnek 1 kétszeres gyöke, ezért $y_{ha} = c_1e^t + c_2te^t$. $y_{ip}$: $\sin t = e^{0t}(0 \cdot \cos 1t + 1 \cdot \sin 1t)$, $0 + j$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek és 0, 1 nulladfokú polinomok, ezért $y_{ip}$-t $P\cos t + Q\sin t$, $P$, $Q \in \mathbb{R}$ alakban keressük. De akkor $y'_{ip} = -P\sin t + Q\cos t$, $y''_{ip} = -y_{ip}$; visszahelyettesítve így $\sin t = -3y_{ip} + y'_{ip} = (-3P + Q)\cos t + (-3Q - P)\sin t$-t, azaz $P = -1/10$, $Q = -3/10$-et kapjuk, vagyis $y_{ip} = -\frac{1}{10}(3\sin t + \cos t)$.

Az általános megoldás tehát $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = c_1e^t + c_2te^t - \frac{1}{10}(3\sin t + \cos t)$.

**4.** Oldja meg az $\begin{cases} y_1' + y_1 &= e^t \\ y_2' - y_2 &= 2e^t \end{cases}$ differenciálegyenletrendszert!

**Megoldás.** Ez két állandó együtthatós lineáris egyenlet. Az első megoldása: Az $y' = -y$ homogén egyenlet megoldása $y_{ha} = ce^{-t}$. Az inhomogén egy megoldása állandók variálásával: $y = c(t)e^{-t} \rightsquigarrow e^t = y' + y = c'(t)e^{-t} \rightsquigarrow c'(t) = e^{2t} \rightsquigarrow c(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$, vagyis $y_{ia1} = y_{ha} + y_{ip} = ce^{-t} + \frac{1}{2}e^{2t}e^{-t} = ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$.

A második megoldása: Az $y' = y$ homogén egyenlet megoldása $y_{ha} = ce^t$. Az inhomogén egy megoldása állandók variálásával: $y = c(t)e^t \rightsquigarrow 2e^t = y' - y = c'(t)e^t \rightsquigarrow c'(t) = 2 \rightsquigarrow c(t) = 2t$, vagyis $y_{ia2} = y_{ha} + y_{ip} = (c + 2t)e^t$.

**5.** Oldja meg az $y'' - y' - 2y = e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdetiérték-problémát Laplace-transzformáció segítségével!

**Megoldás.** Az egyenletet Laplace-transzformálva, a kezdetiértékeket is figyelembe véve $\frac{1}{s-2} = (s^2 - s - 2)Y$, amiből $Y = \frac{1}{(s-2)^2(s+1)} = \frac{-1/9}{s-2} + \frac{1/3}{(s-2)^2} + \frac{1/9}{s+1}$. Visszatranszformálva: $y = (\frac{1}{3}t - \frac{1}{9})e^{2t} + \frac{1}{9}e^{-t}$ mert $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = -\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\frac{1}{s-2}\right\} = t\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$.

**IMSc-feladat.** Legyen $f$ folytonos függvény és $g(t) = \int_0^t f(x)\ dx$. Mutassa meg, hogy ha $F(s)$ ill. $G(s)$ az $f(t)$ és $g(t)$ Laplace-transzformáltjai, akkor $F(s) = sG(s)$!

**Megoldás.** $g'(t) = f(t)$, tehát $F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}(s) = \mathfrak{L}\{g'(t)\}(s) = s\mathfrak{L}\{g(t)\}(s) - g(0) = sG(s)$.