4. vizsga
Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Hanna minden tanítási napon a többitől függetlenül 0,6 valószínűséggel hatos, 0,4 valószínűséggel négyes villamossal érkezik az egyetemre. Feltéve, hogy a múlt hét öt tanítási napja alatt összesen háromszor jött hatossal, mennyi a valószínűsége, hogy múlt pénteken hatos villamossal érkezett az egyetemre?

   Megoldás:

   (0 pont) Legyen H az az esemény, hogy Hanna a múlt héten háromszor jött hatos villamossal, P pedig az, hogy múlt pénteken hatos villamossal érkezett.

   (1 pont) A kérdéses valószínűség $\mathbb{P}(P \mid H)$.

   (2 pont) A feltételes valószínűség definíciója szerint

   $$\mathbb{P}(P \mid H) = \frac{\mathbb{P}(P \cap H)}{\mathbb{P}(H)}$$

   (3 pont) Ha X jelöli a napok számát egy héten, amikor Hanna hatossal megy az egyetemre, akkor $X \sim Bin(5; 0{,}6)$, és

   $$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456.$$

   (Ez persze az X változó bevezetése nélkül is megkapható, hasonlóan az alábbiakhoz.)

   (1 pont) Ha P és H is teljesül, az azt jelenti, hogy pénteken kívül a hét első négy napjából pontosan kettőn ment Hanna hatossal. Ezt a két napot $\binom{4}{2} = 6$-féleképp választhatjuk,

   (1 pont) az egyes lehetőségek pedig (az egyes napok függetlensége miatt) $0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2$ valószínűséggel következnek be, tehát

   (1 pont) $\mathbb{P}(P \cap H) = 6 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}20736.$

   (1 pont) Tehát

   $$\mathbb{P}(P \mid H) = \frac{6 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2}{10 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

2. Egy szabályos kockával kétszer dobunk. Jelölje X a dobott egyesek, Y pedig a dobott kettesek számát. Határozzuk meg X és Y együttes eloszlását, és döntsük el, hogy függetlenek-e az X és Y változók.

Megoldás:

(1 pont) X és Y lehetséges értékei 0, 1 vagy 2, azaz $\mathrm{ran}X = \mathrm{ran}Y = \{0, 1, 2\}$.

(1 pont) Ha két egyest dobtunk (azaz $X = 2$), akkor nem dobhattunk egyetlen kettest sem, azaz $Y = 1$ és $Y = 2$ sem teljesülhet. Hasonlóan, ha $Y = 2$, akkor $X = 1$ nem teljesülhet. Azaz

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 0.$$

(1 pont) Az, hogy pontosan két egyest dobunk (ami megegyezik az $\{X = 2, Y = 0\}$ eseménnyel), $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ valószínűséggel teljesül. Ugyanilyen eséllyel dobunk két kettest, azaz

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{36}.$$

(1 pont) Az, hogy egyesből és kettesből is egy-egy darabot dobunk, kétféleképp történhet: vagy az első dobás egyes és a második kettes, vagy fordítva. Így tehát

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

(2 pont) Ha egy darab egyest dobunk, és nem dobunk kettest, akkor a másik dobás a 3, 4, 5, 6 számok valamelyikét adhatja. Figyelembe véve, hogy az egyes az első és a második dobás során is adódhat, ez összesen 8-féle lehetőséget jelent, így tehát

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

Hasonlóképp adódik, hogy egy kettes és 0 db egyes valószínűsége

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{8}{36}.$$

(1 pont) Ha sem 1-est, sem 2-est nem dobunk, akkor mindkét dobásnál 4 lehetőség adódik, azaz

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

(0 pont) Összefoglalva:

Y \ X	0	1	2
0	16/36	8/36	1/36
1	8/36	2/36	0
2	1/36	0	0

(1 pont) A két változó pontosan akkor volna független, ha $\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = l)$ teljesülne minden $k, l \in \{0, 1, 2\}$ esetén,

(2 pont) ez azonban nem teljesül, pl. $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{36} \neq 0 = \mathbb{P}(X = 2, Y = 2)$.

3. Választunk egy pontot egyenletesen véletlenszerűen a $[0; 1] \times [0; 1]$ négyzet belsejében (tehát nem az oldalain), majd összekötjük a választott pontot a négyzet $(0; 0)$ és $(1; 0)$ csúcsaival. Mi a valószínűsége, hogy az így kapott két egyenesnek és a négyzet határának a fenti két csúcstól különböző két metszéspontja a négyzet ugyanazon oldalán fekszik?

Megoldás:

(1 pont) A választott pont az $\Omega = [0;1] \times [0;1]$ négyzetre esik, ez tehát az eseménytér.

(2 pont) A választott pontot a $(0;0)$ csúccsal összekötve adódó egyenes a négyzet határát egy további pontban vagy a felső oldalélén (vagyis a $(0;1)$ és $(1;1)$ csúcsokat összekötő élén), vagy pedig a jobb oldali élén (azaz az $(1;0)$ és $(1;1)$ csúcsokat összekötő élén) metszi.

Hasonlóképp a választott pontot az $(1;0)$ csúccsal összekötve adódó egyenes a négyzet határát egy további pontban vagy a felső oldalélén, vagy pedig a bal oldali élén (azaz a $(0;0)$ és $(1;1)$ csúcsokat összekötő élén) metszi.

(1 pont) A két metszéspont tehát akkor lehet ugyanazon oldalélen, ha mindkét egyenes a felső oldalélen metszi a négyzetet.

(2 pont) Ez pedig éppen akkor következik be, ha a választott pont nem esik a négyzet egyik átlója alá sem, azaz az átlók felett, esetleg magán az átlón (vagy átlókon) helyezkedik el. Vagyis amennyiben a $(0;1)$, $(1;1)$ ill. $(1/2, 1/2)$ pontok által meghatározott H háromszögre esik, ennek az eseménynek a valószínűségére vagyunk tehát kíváncsiak.

(1 pont) A geometriai valószínűségi mezőről tanultak szerint $\mathbb{P}(H) = \dfrac{T(H)}{T(\Omega)}$.

(1 pont) Itt $T(\Omega) = 1$,

(1 pont) a H háromszög területe pedig $T(H) = \dfrac{1}{4}$,

(1 pont) tehát $\mathbb{P}(H) = \dfrac{1}{4}$.

4. Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/2}, & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az X várható értékét és szórását.

Első megoldás:

(3 pont) A megadott eloszlásfüggvény alapján $X \sim Exp(0{,}5)$,

(3 pont) így a tanult formulák szerint $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$,

(3 pont) valamint $\mathbb{D}^2(X) = \dfrac{1}{0{,}5^2} = 4$,

(1 pont) azaz $\mathbb{D}(X) = \sqrt{4} = 2$.

Második megoldás:

(1 pont) Mivel a $t = 0$ pont kivételével az F_X függvény deriválható, és minden pontban folytonos,

(1 pont) így az előadáson tanult tétel alapján az X változó abszolút folytonos, és az f_X sűrűségfüggvénye az F_X eloszlásfüggvény deriváltja, ahol a derivált létezik, és 0 különben,

(1 pont) azaz

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{-t/2}, & \text{ha } 0 < t, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

(1 pont) Az X várható értéke definíció szerint

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\, dt = \int_0^{\infty} \frac{t}{2} \cdot e^{-t/2}\, dt.$$

(1 pont) Parciálisan integrálva ez

$$= \left[-t \cdot e^{-t/2}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t/2}\, dt$$

(1 pont)

$$= 0 + \left[-\frac{e^{-t/2}}{1/2} \right]_0^\infty = 2.$$

(1 pont) A változó transzformáltjának várható értékére vonatkozó formula alapján

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{t^2}{2} \cdot e^{-t/2}\, dt.$$

(1 pont) Parciálisan integrálva ez

$$= \left[-t^2 \cdot e^{-t/2} \right]_0^\infty + 2 \int_0^\infty t \cdot e^{-t/2}\, dt = 0 + 4\,\mathbb{E}(X) = 8,$$

(1 pont) így $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 8 - 4 = 4$,

(1 pont) azaz $\mathbb{D}(X) = \sqrt{4} = 2$.

5. Egy egyetem nyílt napot tart, és egyik nap délutánján 2 órára két tanszék is meghirdet egymástól függetlenül egy-egy előadást. A nyílt napra 1000 érdeklődő regisztrált (és csak regisztrációval lehet részt venni). Tegyük fel, hogy mind az 1000 érdeklődő megjelenik az adott napon, továbbá a résztvevők (nem ismervén behatóan az előadások témáit) $1/2 - 1/2$ eséllyel véletlenszerűen választanak a két előadás között. Ha mindkét előadást 540 férőhelyes teremben tartják, akkor közelítőleg mekkora a valószínűsége, hogy mindenki le tud ülni mindkét előadáson?

   Megoldás:

   (0 pont) Jelölje a két előadást A ill. B.

   (1 pont) Legyen X azon résztvevők száma, akik az A előadást választják, akkor a B előadást választók száma $1000 - X$.

   (1 pont) Mivel a résztvevők egymástól függetlenül választanak az előadások között $1/2 - 1/2$ valószínűséggel, így $X \sim Bin(1000; 1/2)$.

   (1 pont) A részvevők pontosan akkor tudnak leülni mindkét teremben, ha $X \leq 540$ és $1000 - X \leq 540$ egyszerre teljesül,

   (1 pont) azaz ha $460 \leq X \leq 540$, így a $\mathbb{P}(460 \leq X \leq 540)$ valószínűséget keressük.

   (1 pont) $\mathbb{E}(X) = 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500$ és $\mathbb{D}(X) = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{2}}$,

   (1 pont) így a változót sztenderdizálva a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}\left(\frac{460 - 500}{\sqrt{1000} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{X - 500}{\sqrt{1000} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{540 - 500}{\sqrt{1000} \cdot \frac{1}{2}} \right) = \mathbb{P}\left(-\frac{8}{\sqrt{10}} \leq \frac{X - 500}{\sqrt{1000} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{8}{\sqrt{10}} \right)$$

   (2 pont) A de Moivre–Laplace-tétel szerint a sztenderdizált változó közelítőleg sztenderd normális eloszlású, így a fenti valószínűség közelítőleg

$$\Phi\left(\frac{8}{\sqrt{10}} \right) - \Phi\left(-\frac{8}{\sqrt{10}} \right)$$

   (2 pont) A Φ függvényre tanult formulát is használva ez

$$\Phi\left(\frac{8}{\sqrt{10}} \right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{8}{\sqrt{10}} \right) \right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{8}{\sqrt{10}} \right) - 1 \approx 2 \cdot \Phi(2{,}53) - 1 \approx 2 \cdot 0{,}9943 - 1 = 0{,}9886.$$

6. Egy játékot úgy terveztek, hogy annak fizikai terhelhetősége 40 kg legyen. A gyártás során tesztelték a terhelhetőséget, és az elvégzett tesztek kg-ban kifejezve a következő eredményeket adták a minta különböző elemein: 40, 45, 40, 42, 36, 41, 43. Tegyük fel, hogy a terhelhetőség (kg-ban mérve) normális eloszlást követ ismeretlen μ várható értékkel és ismert $\sigma = 3{,}1$ kg szórással. Teszteljük 99%-os szignifikanciaszinten a $\mu = 40$ nullhipotézist. Oldjuk meg a feladatot ismeretlen szórást feltételezve is.

Megoldás:

(1 pont) A várható értékre vonatkozó nullhipotézis eldöntéséhez (mivel a háttéreloszlás normális ismert szórással) az $u(x_1, \ldots, x_5) = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}$ statisztikát kell kiszámolni, ahol $n = 7$ a minta elemszáma, $\overline{x}$ a mintaátlag, $\sigma = 3{,}1$ kg a szórás, illetve $\mu_0 = 40$ kg.

(1 pont) A mintaátlag:

$$\overline{x} = \frac{40 + 45 + 40 + 42 + 36 + 41 + 43}{7} = 41,$$

(1 pont) így tehát $u(x_1, \ldots, x_5) = \sqrt{7} \cdot \frac{41 - 40}{3{,}1} \approx 0{,}8535.$

Ha az általános képletek nem szerepelnek, de a hibátlan helyettesítés igen, akkor a képletekért járó pont is megadandó.

(1 pont) Az elfogadási tartomány $(-\Phi^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2}); \Phi^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2}))$, ahol Φ a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvénye, és $1 - \varepsilon$ a szignifikanciaszint. Mivel $\varepsilon = 0,01$, így $\Phi^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \approx 2{,}57$, így a fenti intervallum $(-2{,}57; 2{,}57)$.

(1 pont) Ebbe a statisztika értéke beleesik, tehát a nullhipotézist elfogadjuk.

(1 pont) Ha a szórást ismeretlennek tételezzük fel, akkor a várható értékre vonatkozó nullhipotézis eldöntéséhez (mivel a háttéreloszlás normális) a $t(x_1, \ldots, x_5) = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{s^*}$ statisztikát kell kiszámolni, ahol $n = 7$ a minta elemszáma, $\overline{x}$ a mintaátlag, s^* a korrigált tapasztalati szórás, illetve $\mu_0 = 40$ kg.

(1 pont) A korrigált tapasztalati szórás meghatározásához először a minta értékeinek négyzeteit átlagoljuk:

$$\overline{x^2} = \frac{40^2 + 45^2 + 40^2 + 42^2 + 36^2 + 41^2 + 43^2}{7} = \frac{11815}{7} \approx 1687{,}86,$$

(1 pont) ebből a korrigált tapasztalati szórásnégyzet $s^{*\,2} = \frac{n}{n-1}(\overline{x^2} - \overline{x}^2) = \frac{7}{6} \cdot \frac{48}{7} = 8,$

(1 pont) tehát a korrigált tapasztalati szórás $s^* = \sqrt{8}$.

(0 pont) Így tehát $t(x_1, \ldots, x_5) = \sqrt{7} \cdot \frac{41 - 40}{\sqrt{8}} \approx 0{,}9354.$

(1 pont) Az elfogadási tartomány $(-t_{\varepsilon/2}(6); t_{\varepsilon/2}(6))$, ahol $\varepsilon = 0{,}01$, itt pedig $t_{\varepsilon/2}(6) = 3{,}707$, tehát statisztika értéke az elfogadási tartományba beleesik, azaz a nullhipotézist ekkor is elfogadjuk.