1. vizsga
Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. a) Mit jelent az (definíció szerint), hogy az $A, B, C \subset \Omega$ események együttesen függetlenek?

   b) Mondjuk ki a centrális határeloszlás tételét.

   Megoldás:

   a) Az A, B és C események pontosan akkor együttesen függetlenek, ha

   $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) \qquad \mathbb{P}(C \cap A) = \mathbb{P}(C)\,\mathbb{P}(A) \qquad \text{(2 pont)}$$

   illetve

   $$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) \qquad \text{(3 pont)}$$

   teljesülnek.

   b) A centrális határeloszlás tétele:

   (2 pont) Legyen $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ együttesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata, melyekre $0 < \mathbb{D}(X_i) = \sigma < \infty$ minden i-re.

   (3 pont) Ekkor $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$, és minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

   $$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < t\right) \to \Phi(t) \qquad \text{ha} \qquad n \to \infty,$$

   ahol Φ a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

2. A Geysir nevű gejzír Izland egyik látványossága. Ez volt az első gejzír a történelemben, aminek a leírása nyomtatott formában megjelent, sőt (illetve ennek köszönhetően), maga a gejzír szavunk is a Geysir névből származik. A turisták közül ugyanakkor csak keveseknek van türelmük kivárni a kitöréseit, ugyanis ezek meglehetősen ritkák. Tegyük fel, hogy a kitörésig eltelő idő (órákban mérve) folytonos, örökifjú eloszlást követ, 8 óra várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy egy turista a várakozás kezdetétől számolva fél órán belül láthat egy kitörést? Mi a valószínűsége, hogy összesen 1 óránál többet kell várnia a kitörésig, ha tudjuk, hogy a várakozás első fél órájában a Geysir nem tört ki?

Megoldás:

(2 pont) Jelölje X a várakozási időt (órákban mérve) a kitörésig, ekkor, mivel X folytonos és örökifjú nemnegatív valószínűségi változó, így $X \sim Exp(\lambda)$.

(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 8$, azaz $\lambda = \dfrac{1}{8}$.

(1 pont) $\mathbb{P}(X < 0{,}5) = F_X(0{,}5)$, ahol F_X az X eloszlásfüggvénye,

(1 pont) azaz $\mathbb{P}(X < 0{,}5) = 1 - e^{-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}} \approx 0{,}0606$

(1 pont) A második kérdés a $\mathbb{P}(X > 1 \mid X > 0{,}5)$ feltételes valószínűség.

(3 pont) Az örökifjú tulajdonságot felhasználva

$$\mathbb{P}(X > 1 \mid X > 0{,}5) = \mathbb{P}(X > 0{,}5 + 0{,}5 \mid X > 0{,}5) = \mathbb{P}(X > 0{,}5),$$

(1 pont) ez pedig a fentiek szerint (1-ből kivonva a komplementer valószínűségét és a folytonosságot is használva):

$$1 - \mathbb{P}(X \le 0{,}5) = 1 - \mathbb{P}(X < 0{,}5) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{16}}) = e^{-\frac{1}{16}} \approx 0{,}9394.$$

A feltételes valószínűség természetesen a definíció alapján is kiszámolható, és az utolsó 4 pont megszerezhető a következőképp:

(1 pont) A feltételes valószínűség definíciója szerint:

$$\mathbb{P}(X > 1 \mid X > 0{,}5) = \frac{\mathbb{P}(\{X > 1\} \cap \{X > 0{,}5\})}{\mathbb{P}(X > 0{,}5)}$$

(1 pont) A számlálóban az első esemény maga után vonja a másodikat, így a $\mathbb{P}(X > 1)$ valószínűséget keressük.

(1 pont) A komplementerre áttérve (a folytonosságot is használva):

$$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \le 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - F_X(1) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{8}}) = e^{-\frac{1}{8}},$$

(1 pont) Hasonlóképp $\mathbb{P}(X > 0{,}5) = e^{-1/16}$, így

$$\mathbb{P}(X > 1 \mid X > 0{,}5) = \frac{e^{-1/8}}{e^{-1/16}} = e^{-1/16}.$$

3. Legyen $X \sim N(1; 4)$ normális eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(1 < X^2 < 4)$ valószínűséget.

Megoldás:

(1 pont) Írjuk fel a keresett valószínűséget két valószínűség különbségeként:

$$\mathbb{P}(1 < X^2 < 4) = \mathbb{P}(X^2 < 4) - \mathbb{P}(X^2 < 1).$$

(2 pont) Itt a jobb oldalon az első valószínűségben szereplő $X^2 < 4$ feltétel azzal ekvivalens, hogy $-2 < X < 2$, míg a $X^2 < 1$ azzal, hogy $-1 < X < 1$,

(1 pont) ezért (ismét különbségekre bontva)

$$\mathbb{P}(X^2 < 4) = \mathbb{P}(-2 < X < 2) = \mathbb{P}(X < 2) - \mathbb{P}(X < -2)$$

illetve

$$\mathbb{P}(X^2 < 1) = \mathbb{P}(-1 < X < 1) = \mathbb{P}(X < 1) - \mathbb{P}(X < -1).$$

(1 pont) A fent szereplő valószínűségek az X sűrűségfüggvényének különböző értékei,

(2 pont) azaz (mivel X várható értéke 1, szórása pedig 2)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X<2)&=\Phi\left(\frac{2-1}{2}\right)=\Phi\left(\frac{1}{2}\right),\\ \mathbb{P}(X<-2)&=\Phi\left(\frac{-2-1}{2}\right)=\Phi\left(-\frac{3}{2}\right),\\ \mathbb{P}(X<1)&=\Phi\left(\frac{1-1}{2}\right)=\Phi(0),\\ \mathbb{P}(X<-1)&=\Phi\left(\frac{-1-1}{2}\right)=\Phi(-1).\end{aligned}$$

(1 pont) A Φ értékeinek táblázatából kiolvasva

$$\Phi\left(0{,}5\right)\approx 0{,}6915;\qquad \Phi(0)=0{,}5.$$

(1 pont) A negatív helyeken a Φ transzformációs formuláját is használva

$$\begin{aligned}\Phi(-1{,}5)&=1-\Phi(1{,}5)\approx 1-0{,}9332=0{,}0668;\\ \Phi(-1)&=1-\Phi(1)\approx 1-0{,}8413=0{,}1587;\end{aligned}$$

(1 pont) tehnát behelyettesítve

$$\mathbb{P}(1<X^2<4)\approx 0{,}6915-0{,}0668-0{,}5+0{,}1587=0{,}2835.$$

Az első négy pont megszerezhető úgy is, ha valaki az $1<X^2<4$ feltételt először átírja az ekvivalens

$$-2<X<-1\qquad\text{vagy}\qquad 1<X<2$$

feltételre (2 pont), a valószínűséget ezen két (egymást kizáró) esemény valószínűségének összegére bontja (1 pont), majd ezeket egyesével írja fel különbségként (1 pont).

4. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat, amelyből egy érték hiányzik. Határozzuk meg X és Y kovarianciáját.

Y \ X	0	1	2
0	1/3	1/5	
2	1/15	2/15	1/5

Megoldás:

(1 pont) Mivel a táblázat egyes cellái egy teljes eseményrendszer eseményeinek valószínűségeit tartalmazzák, így az ott szereplő számok összege 1.

(1 pont) Vagyis ha $x=\mathbb{P}(X=2,\,Y=0)$ a hiányzó érték, akkor

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+x+\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{1}{5}=\frac{14}{15}+x,$$

azaz $x=\dfrac{1}{15}$.

(1 pont) Az X peremeloszlása:

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5},$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{15}+\frac{1}{5}=\frac{4}{15},$$

(1 pont) így az X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{15} = \frac{13}{15}.$$

(1 pont) Az Y peremeloszlása:

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5},$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5},$$

(1 pont) így az Y várható értéke:

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}.$$

(2 pont) Az XY várható értékének kiszámolásánál csak két 0-tól különböző tag lesz:

$$\mathbb{E}(XY) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{15} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15} + \frac{12}{15} = \frac{16}{15},$$

(1 pont) tehát $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

(1 pont) $= \dfrac{16}{15} - \dfrac{13}{15} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{28}{75} \approx 0{,}3733.$

5. Egy bevásárlóközpont látógatóiról felmérést készítenek, és néhány véletlenszerűen választott vásárlóval kitöltetnek egy kérdőívet, melyen többek között megkérdezik a korukat is. A válaszadók a következő adatokat adták meg: 23, 19, 16, 56, 37, 16, 23, 22 év. Számoljuk ki mintaátlagot és a korrigált tapasztalati szórást, illetve határozzuk meg a mintához tartozó tapasztalati eloszlásfüggvényt.

Megoldás:

(1 pont) A mintaátlag

$$\overline{x} = \frac{23 + 19 + 16 + 56 + 37 + 16 + 23 + 22}{8} = \frac{53}{2} = 26{,}5.$$

(1 pont) A korrigált tapasztalati szórásnégyzet $s^{*\,2} = \frac{n}{n-1} s^2$, ahol s^2 a tapasztalati szórásnégyzet, n pedig a minta elemszáma (jelen esetben 8), a tapasztalati szóránégyzet pedig az $s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ képlettel számolható,

(1 pont) ahol

$$\overline{x^2} = \frac{23^2 + 19^2 + 16^2 + 56^2 + 37^2 + 16^2 + 23^2 + 22^2}{8} = 865,$$

(1 pont) így tehát

$$s^{*\,2} = \frac{8}{7} \cdot (865 - 702{,}25) = 186.$$

(1 pont) A korrigált tapasztalati szórás tehát $s^* = \sqrt{s^{*\,2}} = \sqrt{186} \approx 13{,}6382.$

Ha az általános képletek nem szerepelnek, de a hibátlan helyettesítés igen, akkor a képletekért járó pont is megadandó. Ha a megoldó számológép segítségével számolja az átlagot és a korrigált tapasztalati szórást közvetlenül a mintából (tehát a fenti helyettesítéseket nem végzi el), a korrigált tapasztalati szórás és szórásnégyzet, valamint a tapasztalati szórásnégyzet képletének (vagy egy összevont képletnek), illetve az $\overline{x^2}$ értelmezésének szerepelnie kell az előző 4 pontért. Ezek bármelyikének hiányáért egyenként 1 pont levonás jár a fenti 4-ből (vagyis például egy puszta eredményközlés esetén mindössze az átlagért jár pont).

(1 pont) A rendezett minta

$$16,\ 16,\ 19,\ 22,\ 23,\ 23,\ 37,\ 56,$$

(4 pont) tehát a tapasztalati eloszlásfüggvény

$$F^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 16, \\ \frac{1}{4}, & \text{ha } 16 < t \le 19, \\ \frac{3}{8}, & \text{ha } 19 < t \le 22, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 22 < t \le 23, \\ \frac{3}{4}, & \text{ha } 23 < t \le 37, \\ \frac{7}{8}, & \text{ha } 37 < t \le 56, \\ 1, & \text{ha } 56 < t. \end{cases}$$

(A rendezett mintának nem kell feltételnül szerepelni, az érte kapható 1 pont egy hibátlanul megadott eloszlásfüggvény esetén is jár.)

6. Egy normális eloszlású, 4 szórású minta alapján 95%-os szignifikanciaszintű konfidenciaintervallumot számoltunk a háttéreloszlás várható értékére, és eredményül a $(3{,}04; 6{,}96)$ intervallumot kaptuk.

   a) Határozzuk meg a minta elemszámát.

   b) Határozzuk meg az ugyanezen mintához tartozó 99%-os szignifikanciaszintű konfidenciaintervallumot is a várható értékre. (Elegendő két tizedesjegyre kerekített értékeket megadni.)

   Megoldás:

   a)

   (1 pont) Ha az intervallum sugara r, akkor $2r = 6{,}96 - 3{,}04 = 3{,}92$, azaz $r = 1{,}96$.

   (1 pont) Ugyanakkor, mivel a szignifikanciaszint $1 - \varepsilon = 0{,}95$, azaz $\varepsilon = 0{,}05$,

   (2 pont) ez a sugár a tanult képlet szerint

$$r = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \Phi^{-1}(0{,}975) \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}},$$

   ahol n a minta elemszáma.

   (1 pont) Ezt átrendezve $\sqrt{n} = 4$, azaz $n = 16$ adódik.

   b)

   (2 pont) A konfidenciaintervallum középpontja a mintaátlag, azaz $\overline{x} = \dfrac{3{,}04 + 6{,}96}{2} = 5$.

   (1 pont) Ha a szignifikanciaszint $1 - \varepsilon = 0{,}99$ (azaz $\varepsilon = 0{,}005$),

   (1 pont) akkor a fenti képlet az intervallum r' sugarára a következőt adja:

$$r' = \Phi^{-1}(0{,}995) \cdot \frac{4}{\sqrt{16}} \approx 2{,}58.$$

   (1 pont) Tehát a 99%-os szignifikanciaszintű intervallum a várható értékre

$$(5 - 2{,}58; 2 + 2{,}58) = (2{,}42; 7{,}58).$$