① - <u>Bayes döntési helyzet</u>   PDSS-szekv.
PDSS becslesdontes?

-Alaphelyzet: akció/kimenetel (hasznosság / akció várható hasznossága) / maximális várh. hasznosság elve

PDSS-ho-eth.

-További információ értéke

-Szekvenciális döntési helyzet, opt. döntés szekv. problémákban

PDSS-szekv

② - <u>Döntés / Predikció minősége</u>

6 ⇐ |- Hasznosság függvények (D1, F1)

7 ⇐ |- Bináris eset
- Standard mérőszámok (sens., spec., ROC, AUC ...

③ <u>Markov-lánc</u>   PDSS-hov/22

- def
- többlépéses átm. eloszlás származtatása
- invariáns eloszlás
- határ eo.

10/16

- stabilitás aperiodikusság & irreducibilitás mellett
- reverzibilitás

4/20

- Metropolis-Hasting alg (helyesség biz)

* - Gibbs ~ (~ MH-ra való visszavezetéssel)

④ <u>Rejtett Markov-modellek</u>   12, 13

12 - eloszlás repr.   - következt. típ: * - prediktív kö.. - szűrés levezetése

~~-Bayes szabály~~

~~-Diagn. következtetés: Általános forma / Bináris eset~~

(5) Naiv Bayes-modell   8.3   PDSS-prob.graph.mod

- Eloszlás repr.
- Bayes - szabály
- Diagn. következtetés: Általános forma / bin. (log lin) eset

8.11

(6) Eloszlások függetlenségi viszonyai   10   PDSS-prob-graph. mod

- gráfosság axiómái (valség alapok 4. ax)
- Bayes-hálók definíciói (sorrendi és d-elv.)

10/14
  - reprezentálhatóság
    - 2 ellenpélda magasabbr. ftlu & tranzitivitás
    - teljesség összes param. tekintve

10/17 - ekvivalencia osztályok & oksági értelmezés lehetősége
  - Markov háló repr-val való viszony

x — Markov-hálók def   14   PDSS-hov-22
  - repr.
    - 2 ellenp
    - Bayes-h hoz viszony

---

(7) Eloszlások dekompozálása   9

- feltételes valség
- függetlenségek   def   10/3
- láncszabály

10/13 - Markov határ és takaró (Markov-lánc & háló, Bayes-háló)
- Bayes-hálókkal való repr (teljesség biz)
- Markov ~ (értelm és ~)

(8) Teljes Bayes-i megközelítés Bayes-hálóknál

MI 20.ch

10/28 - strukturális priorok

10/23 - paraméter priorok (Dirichlet-ee) chapter 20.pdf

10/29 - Teljes Bayes-i köv. áll. formulája

+

+ (9) Exakt következtetés polifában

levezetés 17/11

PDSS-hor /18 126

(10) Az egzakt következtetés NP teljes

3SAT levezetés 17/11

PDSS-26

+ (11.) Egzakt köv. általános Bayes-hálóban

(levezetés váz) 8/11

- kordiális gráfok és létrehozásuk
- klikkek fája 8/11 PDSS-8

(12) Monte-Carlo következtetés általános Bayes-hálóban

17

- Direkt mintavétel
- fontossági mintavétel (likelihood súlyozás)
- Gibbs mintavételi súlyozás

PDSS_hor_22

1

Bayes döntési helyzet

$C(y, y')$ költségfv.

Ha $\forall y \in Y$-ra $C(y, y')$ konstans $\forall y' \in Y \setminus y$-ra $\Rightarrow$ döntési probléma

Ha nem így van $\rightarrow$ becslési probléma

$C(Y, g(X))$ függ (X, Y)-ből, maga is valószí változó

$R(g) = E[C(Y, g(X))]$ $\Rightarrow$ optimális g megkeresése

$\Downarrow$ Bayes feladat

Risk $_g$ globális

$r(g, x) = E[C(Y, g(x)) \mid X = x]$

$\downarrow$

Lokális kockázat

Költségfvek:

$C_0(y, y') = 1_{y \neq y'}$	indikátor f	$\arg\max_{y \in Y} P[Y = y]$
$C_1(y, y') = \lVert y - y' \rVert$	abszolút hiba	medián
$C_2(y, y') = \lVert y - y' \rVert^2$		várható érték $E(Y)$

Optimalizálás

Bayes-döntés

g - döntési fv

$g(x)$ - döntés

$\{Y = y_i\}$ - i. hipotézis

$q_i = P(Y = y_i)$ apriori valószínűség

$q_i(x) = P[Y = y_i \mid X = x]$ posteriori valószínűség

X egy partíciója: $D_i = \{x \in X \mid g(x) = y_i\}$ $i = 1..k$

$D_j^* \Leftrightarrow d_j(x) < d_i(x) \quad \forall i < j$ és

$d_j(x) \leq d_i(x) \quad \forall i > j$

D^* tartományokkal megh. g^* döntési fv Bayes-döntés.

$\forall x$-re minimális lok. kock. $\Rightarrow$ optimális

$r(g^*, x) = \min_{1 \leq i \leq k} d_i(x)$

Többletinformáció értéke

$$VOI(X|E) = \sum_{x \in X} P(x|E) \cdot \left| E_{U|E \cup \{x\}}[U(U)] - E_{U|E}[U(U)] \right|$$

Egy vagy több új változó ismerete hogyan befolyásolja a várható hasznosságot.
A képlet: Az új evidencia feltételes valószínűséggel súlyozva mekkora abszolút hasznosságváltozást okoz az új evidencia belépése

Várható hasznosság maximalizálása

$$MEU(a^*|s) = \max_{a \in A} MEU(a|s) = \max_{a \in A} \sum_{s_i \in S} U(s_i) P(s_i|a, s) \quad s \in S$$

Szekvenciális döntés

$$U^t(s) = U(s) + \sum_{s_i \in S} U^{t+1}(s_i) P(s_i|a, s)$$

$$MEU(a^*|s) = \max_{a \in A} \sum_{s_i \in S} U^t(s_i) P(s_i|a, s)$$

végtelen lépésszám esetén leszámítolás

$$MEU'(a^*|s) = \max_{a \in A} \sum_{s_i \in S} \gamma U^t(s_i) P(s_i|a, s)$$

További info értéke

ai hatására megsz. adat

$$MEU(a^*|d) = \max_{a \in A} EU(a|d) = \max_{a \in A} \sum_{d_i \in D} U(d_i) P(d_i|a, d), \; d \in D \qquad \boxed{d \subset d_i}$$

$$VPI_d(D_j) = \left[\sum P(D_j = d_{ij}|d) \, MEU(a^*_{D_j, d} | D_j = d_{ij}, d) \right] - MEU^*(a^*_d|d)$$

$VPI \geq 0$, VPI sorrendfüggetlen az infóktól, nem additív

② Döntés / Predikció minősége

Hasznosságfüggvények

$A \succ B$ A preferred over (to) B

$A \sim B$ indifference

$A \succsim B$ B is not preferred to A

$\succ$ - teljes sorrendezhető
- tranzitív
- folytonos
- ~~kicserélhető~~ helyettesíthető
- monoton

} Ha ezek közül vmi nem teljesül, irracionális pref

Hasznosság lehet: - U [0,1]
- Micromort
- Quality Adjusted Life Years

Pénz nem az

Többparaméteres hasznosságnál ritkán adódik szigorú dominancia

Eloszlások !! sztochasztikus dominanciája

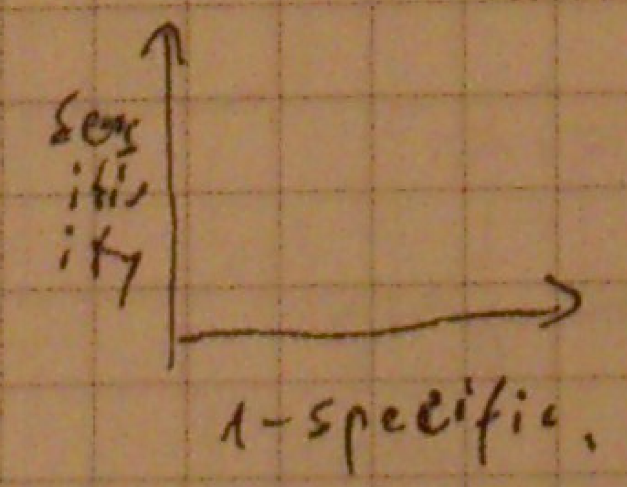
Bináris

$$\text{Érzékenység} = \frac{TP}{TP+FN}$$

$$\text{Specifikusság} = \frac{TN}{TN+FP}$$

} Nem függ P/N aránytól

$$AUC = P(g(x_{normal}) < g(x_{beteg}))$$

ROC 

③ Markov-lánc

Def:

$X = \{x_0, x_1 ..\}$ markov lánc, ha $P(x_t | x_{t-1} .. x_0) = P(x_t | x_{t-1})$

Homogén ha $P(x_t | x_{t-1}) = c$ $\forall t$-re

Invariáns eo.

$p^{inv} = p^{inv} P$ ← X átmeneti mátrixa

Ha $p_0 = p^{inv}$ ⇓ $\forall_t$ $p^{(t)} = p^{inv}$

Stabilitás: X stabil, ha $\lim_{t \to \infty} p(x_t) = p^{(\infty)}$ $\exists$ & eloszlás, ugyanakkor fgtlen $p(x_0)$-tól.

$p^{(\infty)}$ határérték, vagy egyensúlyi eloszlás

Bármely állapotból bármely másik elérhető

Irreducibilitás: diszkrét, véges állapotú X

irred. ha $\forall i, j$ $i \neq j$ $\exists$ $n_{ij} > 0$ hogy $p_{ij}^{(n_{ij})} > 0$

Aperiodicitás ~ aperiodikus, ha $\exists$ i (irreducibilisnél $\forall i$), hogy $\exists$ $n_i > 0$ bármely $n \geq n_i$-re $p_{ii}^{(n_i)} > 0$

Tétel: Ha diszkrét, véges X ireduk & aperiodikus ⇒ stabil és $\exists$ 1 invariáns eo, mely X határértéke eo.-a. Azaz $p^{\infty} = p^{\infty} P$ -nek p^{∞} az egyetlen ne. és eo.

$(p^{\infty}, p^{inv}) \Rightarrow \pi(x)$

Metropolis - Hastings:

Legyen $\pi(x)$ pozitív, nem normált céleloszlás az állapottér felett. Q - átmenet valségi m.,

$q_{ij} > 0 \Leftrightarrow q_{ji} > 0$. Definiáljuk X-et

$$\forall i \neq j : p_{ij} = q_{ij} \min\left(1, \frac{\pi_j q_{ji}}{\pi_i q_{ij}}\right) \rightarrow \frac{0}{0} = 0$$

$$p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij}$$

A definiált X eo. $\pi(x)$, a részletes egyensúly feltétel teljesül. $i = j$ & $q_{ij} = q_{ji} = 0$ esetekre triviálisan. Ha $i \neq j$ & $q_{ij} > 0$

$$\pi_i p_{ij} = \pi_i \frac{\pi_j q_{ji}}{\pi_i q_{ij}} = \pi_j q_{ji} = \pi_j p_{ji} \quad \square$$

Ha Q irreducibilis => P is az lesz

~ aperiodikus => ~

Tehát ha találunk egy irreduc. és aperiód. Q javaslati eo., akkor adott $\pi(x)$ eo a fenti konstrukció stabil és reverzibilis Markov-láncot definiál, $\pi(x)$ invariáns határeloszlással.

0. Aposteriori eloszlás P^* konstr
1. Konstr irred. & aper. Q eloszl javaslati eo. a domainre
2. sorsoljunk x_0 kiinduló áll. P^*-ből
3. $t = 1, 2..$ sorsolás $x^* | x^t$ q-ból

$$\alpha(x, x^*) = \min\left(1, \frac{\pi_{x^*} q_{x^* x^t}}{\pi_{x^t} q_{x^t x^*}}\right)$$

elfogadási valség

nem, akkor $x_{t+1} = x_t$, ha igen $x_{t+1} = x^*$

$\sim \alpha(x_t, x^*)$

4. 3. lépés konvergenciáig

5. konvergencia sebesség elemzése, új Q → goto

④ **Rejtett Markov-modellek**

Alapfeladatok reprezentációja:

- **Szűrés** (~~monitoring~~ filtering): bizonyossági állapot számítása, a jelenlegi állapot feletti a posteriori eo. az adott időpontig vett bizonyítékok ism-ban.
$P(X_t | e_{1:t})$

- **Előrejelzés** (prediction): jövőbeli állapot a posteriori eo. $P(X_{t+k} | e_{1:t})$ $k>0$

- **Simítás**: Múltbeli állapot feletti a posteriori
$P(X_k | e_{1:t})$ $1 \leq k < t$

- **Legvalószínűbb magyarázat**: Melyik állapotsorozat a legvalószínűbb adott megf. generálására
$\arg\max_{x_{1:t}} P(x_{1:t} | e_{1:t})$

- **Likelihood paraméterezés**: (Viterbi-algoritmus)
$\arg\max_{\theta} P(x | \theta)$

$P(X_t | e_{1:t})$

- **Szűrés** (Forward-algoritmus) Model-Likelihood

Számítás dinamikus programozással

Rekurzív: $P(X_{t+1} | e_{1:t+1}) = f(e_{t+1}, P(X_t | e_{1:t}))$

$P(X_{t+1} | e_{1:t+1}) = P(X_{t+1} | e_{1:t}, e_{t+1})) =$
$= \alpha\, P(e_{t+1} | X_{t+1}, e_{1:t})\, P(X_{t+1} | e_{1:t})$

PL: predikció + becslés
ΣX_t

$P(X_{t+1} | e_{1:t+1}) = \alpha\, P(e_{t+1} | X_{t+1}) \sum_{x_t} P(X_{t+1} | x_t)\, P(x_t | e_{1:t})$

Idő & állapottér konstans elég $f_{1:t+1} = \mathrm{Forw}(f_{1:t}, e_{1:t+1})$

- **Előrejelzés** **Jóslás** $P(X_{t+k} | e_{1:t})$ $k>0$

Naiv Bayes hálók

Cél $P(Y, X_1, \dots, X_n)$ eo modellezése
tehát egyetlen valségi modell

$P(Y|X_1 \dots X_n)$ eloszlásban $\forall X_i$ teljesen ftlen.
Y hipotézist ismerve

$\Downarrow$

$P(X_j | X_{i_1} \dots X_{i_m}, Y) = P(X_j|Y)$ bármely $i_1 \dots i_m$ részhalmazra. Ha a feltételes eloszlások adottak $P(X_i|Y)$ $\forall i$-re, akkor a hipotézis eo:

Bayes-szabály:

$$P(Y|X_{i_1} \dots X_{i_m}) = P(X_{i_1} \dots X_{i_m}|Y) \frac{P(Y)}{P(X_{i_1}, \dots X_{i_m})}$$

mivel a ftlens. miatt

$$P(X_{i_1} \dots X_{i_m}|Y) = P(X_{i_1}|Y)\,P(X_{i_2}|Y) \dots$$

$\Downarrow$ Ha a hipotézisek kölcsönös kizárólagosságát és teljességét is vesszük

$$P(X_{i_1}, \dots X_{i_m}) = \sum_{y \in Range(Y)} P(X_{i_1} \dots X_{i_m}|Y)\,P(Y)$$

$\Downarrow$ és mivel ez adott megfigyelések mellett egy normalizációs konstans, elhagyható

$\Downarrow$

$$\boxed{P(Y|X_{i_1} \dots X_{i_m}) \propto P(X_{i_1}|Y) \dots P(X_{i_m}|Y)\,P(Y)}$$

Egy hipotézis valsége az apriori valségének és a szimptómák feltételes valségének szorzata.

Diagnosztikai következtetés

s_1 struktúráján θ param. mellett

$P(y \mid x, \theta, s_1)$ kiszámítása, vagy sztochasztikus közelítése.

Bayesi paradigmában helyett $P(y \mid x, \theta, S)$-el dolgozunk. Valség-i változó $[0, 1]$ ee-t szeretnénk megkapni vagy a

$$P(y \mid x) = E_{p(\theta, S)} P(y \mid x, \theta, S)$$

$$\Big\downarrow$$

$$P(\theta \mid a(S)) P(S)$$

$$\Big\downarrow$$

Dirichlet ec. hipp.

- Általános esetben $\nexists$ P alg
- Érvelés fák esetén – csomópontok sz. lin
- Érvelés kilikek fájá – klikkméretben exp
- Sztochasztikus szim – főleg azonos nagyságú állapotátmenetekkel stb.

⑥ Eloszlások függetlenségi viszonyai

Gráfosság axiómái (függetlenségi ax.)

- szimmetria: $I_p(X;Y|Z)$ iff $I_p(Y;X|Z)$
- dekompozíció: $I_p(X;Y \cup W|Z)$
  $$\Downarrow$$
  $I_p(X;Y|Z)$ & $I_p(X;W|Z)$
- gyenge unió: $I_p(X;Y \cup W|Z) \Rightarrow I_p(X;Y|W \cup Z)$
- összehúzás: $I_p(X;Y|Z)$ & $I_p(X;W|Z \cup Y)$
  $$\Downarrow$$
  $I_p(X;Y \cup W|Z)$

Bayes-háló reprezentációs lehet.:

- együttes eo. táblázat ábrázolása
- összefüggőségi térkép
- kauzális rep.

- $P(X_1 \ldots X_n)$ eo faktorizálható G DAG szerint, ha $P(X_1 \ldots X_n) = \prod P(X_i | Pa(X_i))$
- " eo.-ra teljesül a sorrendi Markov-feltétel G szerint, ha

$$\forall i = 1..n : I(X_{\pi(i)} | Pa(X_{\pi_i}) | \{X_{\pi_j} | j < i\} \setminus Pa(X_{\pi_i}))_p$$

struktúra topologikus rendezése

- ~ eo-ra teljesül a lokális (szülői) Markov feltétel G szerint, ha bármely változó ftlen nem leszármazottaitól feltéve a szüleit.

- ~ eo-ra teljesül a globális Markov feltétel G szerint, ha

$$\forall X, Y, Z \subseteq \{X_i\}: I(X|Z|Y)_G \Rightarrow I(X|Z|Y)_P$$

Azaz ha Z d szeparálja X-et Y-tól.

Az előző 4 feltétel ekvivalens.

Gráfreprezentáció nem képes ábrázolni, hogy a valószínűségszámítás szerinti páronkénti ftlenségből nem következik változóhalmazok függetlensége.

Kauzalitás sem biztos, hogy egyértelmű. A gráf irányítottsága függ a változók felvételének sorrendjétől.

Stabilitás: P eo stabil, ha $\exists$ G DAG (perfect map), mely minden P-beli függőséget (és függetlenséget) reprezentál.

Ekvivalencia: G_1 és G_2 megfigyelés-ekv. ha ugyanazon függéshalmazt tartalmazzák

$\Updownarrow$

Ua. irányítatlan struktúra és ugyanazon V-struktúrák

Esszenciális gráf

$\forall$ megf. ekv. DAG, mely az ugyanolyan irányú éleket tartalmazza.

$X \rightarrow Z \leftarrow Y$ X és Y Z ősei?

Oksági paradoxonok

- Tisztán magasabbrendű függések: X, Y, Z bin, X, Y független egyenletes eo, $Z = XOR(X,Y) \Rightarrow (X \perp\!\!\!\perp Z) \,\&\, (Y \perp\!\!\!\perp Z)$

  de

  $(\{X,Y\} \not\!\perp\!\!\!\perp Z)$

- Függések iránya: Markov lánc ~~P(...)~~ $p(x_i | x_{i-1})$ átmeneti valséjek helyett leírható $p(x_{i-1} | x_i)$ alakban is.

- Intranzitív függések: Tfh X, Y, Z közül egyalább 1 bináris. $\exists$ olyan eo. $p(X,Y,Z)$, hogy $(X \not\!\perp\!\!\!\perp Y) \,\&\, (Y \not\!\perp\!\!\!\perp Z)$ De $(X \perp\!\!\!\perp Z)$. Ez egy $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ V-struktúrával magyarázható, melyben $(X \not\!\perp\!\!\!\perp Z | Y)$

- Simpson paradoxona: $p(Y|X) > p(Y|\bar{X})$ de $p(Y|X,Z) \leq p(Y|\bar{X},Z)$ és $p(Y|X,\bar{Z}) < p(Y|\bar{X},\bar{Z})$, azaz az asszociáció hatása rétegenként és összesítve eltérő lehet.

7) Eloszlások dekompozálása

Láncszabály: $P(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid x_1 \dots x_{i-1})$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid \text{Parents}(x_i))$$

- Each node is conditionally independent of it's nondescendants given it's parents
- ~ of all others given its Markov-blanket (parents + children + children's parents)

Markov-takaró $MB_p(x_i)$ ~, ha

$(x_i \perp\!\!\!\perp U \setminus MB(x_i) \mid MB(x_i))_p$

A minimális Markov takaró -> Markov határ

8. Teljes Bayes-i megközelítés BN-ből

Paraméterfüggetlenség

Globális: $P(\Theta|G) = \prod_{i=1}^{n} p(\Theta_i|G)$

Lokális: $p(\Theta_i|G) = \prod_{j=1}^{q_i} p(\Theta_{ij}|G)$

Likelihood elv:

G_1 és G_2 megf. ekv.

$$p(\Theta_v|G_1) = p(\Theta_v|G_2)$$

Paraméterek nem redundáns sete az együttes eo. felett

Paraméter priorok – Dirichlet

Ha a sűrűségek +, likelihood és paraméterfüggetlenség teljes G_c struktúrára írja, hogy $p(\Theta_u|\mathcal{E})$ Dirichlet eloszlású $N_{x_1 \dots x_n}$ paraméterekkel

Paraméter modularitás

Ha $pa(X_i)$ G_1 és G_2-ben ugyanolyan

$$p(\Theta_{ij}|G_1) = p(\Theta_{ij}|G_2)$$

Ahol Θ_{ij} a $p(X_i|Pa(X_i))$ feltételes valség $pa(X_i)$ konfigurációk valamely fix sorrendezésében.

$= N' p x_1 \ldots x_n$

Tétel Ha $p(\Theta_U|\mathcal{E})$ egy $N_{x_1 \ldots x_n}$ param Dirichlet eloszlás és az egész hálózatra teljesül a param modularitás G_{CP} $(G_c) > 0$, akkor teljesül a likelihood & függetlenségi ekvivalencia és a felbontott eo. a paraméterekhez a Dirichlet-eo. szorzata.

$$p(\Theta|G) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{q} \prod_{k=1}^{r_i} \theta^{N' r_{i\ldots}} (x_i = k, pa(x_i, G) = pa_{ij}) - 1$$

q: szülői konf. száma

r_i: x_i értékei

Fix G-struktúrában

$$p(\Theta|G) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{q} Dir(\theta_{ij}|N_{ij}) \propto \prod_i^{n} \prod_j^{q_i} \prod_k^{r_i} \theta^{N_{ijk}-1}$$

Strukturális priorok

Minden hiányzó, vagy extra él $\to$ uniform K valószg-gel modellezzük G_0 referenciától

$$P(G) \propto K^{\delta} \quad / \quad \delta = \sum_{k \le i \le j \le n} 1_{\{(e_{ij} \in G) \wedge (e_{ij} \notin G_0) \vee (e_{ij} \notin G) \wedge (e_{ij} \in G_0)\}}$$

$$P(G) = c \prod_{i=1}^{K} p(F_i(G))$$

$F_i(G)$

feature értéke G-ben

A strukturális modularitás kimondja

Ha $\forall i$ $F_i(G)$ csak $Pa(X_i)$-től függ

$$P(G) \propto \prod_{i=1}^{n} p(pa(X_i, G))$$

Teljes Bayes-i köv. általános formulája

① Domain értékek és megfigyelések ~~modell~~ felett
- fix param & struktúra
- Bayesi param, fix strukt
- Bayes-i param & strukt

$$\cancel{p(y|x) = E_{p(G)}[E_{p(\theta|G)}}$$

$$p(y|x) = E_{p(G)}[E_{p(\theta|G)}\{p(y|x,\theta,G)\}]$$

② Domain értékek és beavatkozási info ~~modell~~ felett

③ Modellparaméterek felett

④ Modelstruktúrák felett

$$p(G|D_N) \propto p(G) \int p(D_N|\theta, G)\, p(\theta|G)\, d\theta =$$
$$= p(G)\, p(D_N|G)$$

⑤ Modell tulajdonságok és ABN - propozíciók felett

$$p(\alpha(G) \text{ ABN} - KB) = \sum_{\alpha(G) \text{ is true}} p(G)$$

(10) Az egzakt következtetés NP teljes

A CPT táblák miatt a szülőszámban exponenciális egy háló mérete

Karp-redukció alapján levezetéssel.

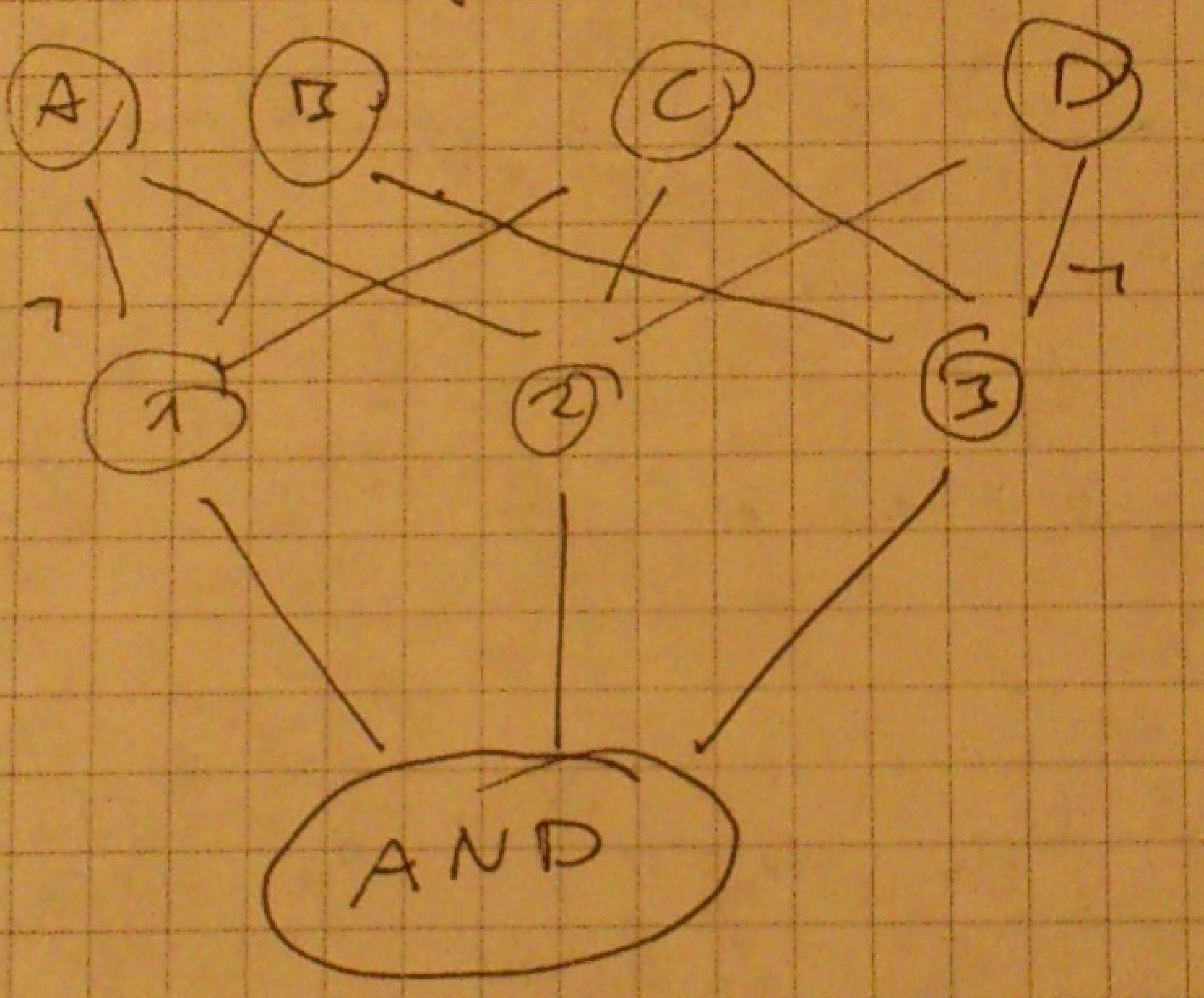
3SAT → Bayes következtetés

A hálót leírjuk 3-CNF (konj. normál forma),

3SAT probléma → 3CNF

pl: $(\bar{A} \vee B \vee C) \wedge (A \vee C \vee D) \wedge (B \vee C \vee \bar{D})$

Konstruáljunk egy hálót, A, B, C, D 50% igaz/hamis



1, 2, 3 csomópontok CPT táblája a hozzájuk tartozó változók megf. igazságtáblája. Hasonlóan az AND csomópont is

A 3SAT visszavezethető ebben a hálóban való következtetésre

⇓

köv NP nehéz

(12) Monte-Carlo következtetés általános Bayes-hálókban

Az ötlet, hogy az eloszlás feletti integrált/összeget analízis helyett mintavétellel lehet közelíteni

$$\bar{f} = E_{\pi(x)}[f(X)]$$ ← ezt kell kiszámítani

Direkt mintavételezés

1 - Mintahalmaz generálása $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ (független, azonos eo) $\pi(x)$ mintavételezés-ével

2 - Minta alapján $\hat{f}_N = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$ számítása

3 - $|\bar{f} - \hat{f}_N|$ hiba számítása, megbízhatósági becslés a hiba korlátjára

- $\hat{f}_N$ a nagy számok törvénye alapján erősen konzisztens: $P(\lim_{N\to\infty} \hat{f}_N = \bar{f}) = 1$

- központi határeo. tétele alapján $\hat{f}_N$ standardizáltja aszimptotikus Gauss-eo.

$$\frac{\hat{f}_N - \bar{f}}{\sigma_N} \to N(0,1) \text{ ha } N \to \infty \qquad \sigma_N = \frac{Var(f(x))}{\sqrt{N}}$$

- Korlátos $f(x)$ esetén (mint itt), a konvergencia sebességéről is becslések adhatóak

Hoeffding-Bernstein: $0 \leq f(X) \leq 1$

$$p(|\hat{f}_N - \bar{f}| \geq \varepsilon) \leq 2\exp(-2\varepsilon^2 N) \leq \delta$$

$$E[|\hat{f}_N - \bar{f}|] \leq \sqrt{\frac{c_0}{N}}$$

// Mi a szerepe a c_0 és δ?

Fontossági mintavételezés

Ha $\pi(x)$ nem mintavételezhető hatékonyan, de van egy megegyező tartójú $q(x)$ eo.

$$\bar{f} = E_{\pi(x)}[f(x)] = E_{q(x)}\left[\frac{f(x)\pi(x)}{q(x)}\right]$$

$$\hat{f}_w = \frac{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} w(x_t) f(x_t)}{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} w(x_t)} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} w^*(x_t) f(x_t)$$

$$w(x_t) = \frac{\pi(x_t)}{q(x_t)} \qquad w^* = \frac{w(x_t)}{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} w(x_t)}$$

Gibbs-mintavételezés

Az állapotvektornak mindig csak 1 elemét változtatja, annak többiből való feltételes eo. szerint, 1 elfogadási valószg-gel

- bizonyítékokkal kompatibilis konfiguráció sorsolása
- evidencia változók rögzítése, többi változóban:
  - aktuális változó értékét újrasorsoljuk Markov-takarója, mint feltétel szerint
- Minden így kapott konfiguráció eleme lesz a mintahalmaznak