Atomfizika ZH 2008. október 17. A

1. Egy mindentől elszigetelt elektron a fénysebesség ¾ részével halad. Mekkora az energiája és az impulzusa? (2 pont)

2. A hidrogénatom *8.* gerjesztett állapotában mekkora az elektron energiája és a pályamozgásból származó perdülete a Bohr-modell szerint? (2 pont)

3. Egy adott fémre jellemző kilépési munka $W_{ki} = 4{,}4\ eV$. Milyen frekvenciájú fény esetén tapasztalunk fotoeffektust? Kétszer ekkora frekvencia esetén mekkora lesz a fémből kilépő elektronok mozgási energiája? (2 pont)

4. Homogén mágneses térbe elektronokat és velük azonos tömegű, de ellentétes töltésű részecskéket (pozitronokat) lövünk. Milyen távol lesz a helyük egymástól az ernyőn, feltéve, hogy ugyanott lépnek be a mágneses térbe és egy félkör megtétele után becsapódnak? (A részecskék sebessége $v = 10^5\ m/s$, a mágneses indukció $B = 0{,}1\ T$.) (2 pont)

5. Adjuk meg egy *c/2* sebességgel mozgó elektron de Broglie hullámhosszát! Milyen frekvenciájú fénynek van ugyanekkora hullámhossza? (2 pont)

6. Becsüljük meg, hogy mekkora erőt fejt ki a Nap a Földre a sugárzásából kifolyólag! (A napsugárzás egységnyi felületre vonatkozó teljesítménye a Föld közelében $I = 1500\ W/m^2$, a Föld sugara $R_F = 6350\ km$.) (2 pont)

7. Feltéve, hogy a $T_{Nap} = 6000\ K$ felszíni hőmérsékletű Nap a legtöbb fotont a $\nu_{max} = 6 \cdot 10^{14}\ Hz$ frekvenciáń bocsátja ki, becsüld meg, hogy Te (a hőmérsékletedből kifolyólag) milyen hullámhosszon sugározol a legintenzívebben! (2 pont)

8. Tekintsünk egy olyan *m* tömegű részecskét, melynek jellemzője, hogy kettő belőle egyszerre nem létezhet azonos energiájú állapotban. Feltéve, hogy T hőmérsékleten egy dobozba egy ilyen részecskéből csak λ hullámhosszú változat kerülhet, adjuk meg az átlagos részecskeszámot! (Útmutatás: a fotonoknál megismert módszert használjuk: alkalmazzuk a Boltzmann-statisztikát és először határozzuk meg az átlagos energiát!) (4 pont)

9. A számegyenesen egy, az origóból induló véletlenszerűen vándorló, egységnyi ugrásokat végrehajtani képes részecske mekkora valószínűséggel jut N lépés után a j. koordinátába, ha a balraugrás valószínűsége kétszer akkora, mint a jobbraugrásé? (4 pont)

10. Egy nyugalomban lévő elektronnak úgy ütközik neki egy foton, hogy a hullámhossza a felére csökken és az eredeti mozgásirányára merőlegesen halad tovább. Mekkora volt a bejövő foton hullámhossza? Mekkora szöget zár be a bejövő foton pályájával a meglökött elektron haladási iránya? (4 pont)

11. Egy 30 nA áramerősségű hidrogén ion-nyaláb esik egy vékony nátrium-fóliára. A fóliától 5 m-re található egy 2 cm^2 felületű, a fólia felé néző 90% hatásfokú detektor (azaz átlagosan 10 beütésből 9-et jelez csak), mely 1 óra alatt $5 \cdot 10^5$-szer szólal meg. Feltéve, hogy a fóliában az egységnyi felületen elhelyezkedő szórócentrumok száma $10^{25}\ cm^{-2}$, mekkora a differenciális hatáskeresztmetszet a detektor irányában? (6 pont)

12. A Maxwell-féle sebességeloszlás szerint a valószínűség, hogy egy tetszőleges részecske sebességének nagysága egy kicsiny [v, v+dv] intervallumba essen: $P(v)dv = 4\pi(m/2k_BT\pi)^{3/2}\, v^2 \exp(-mv^2/2k_BT)\, dv$. Adjuk meg a sebesség négyzetének az átlagát! Milyen más elv alkalmazásával juthattunk volna ugyanerre az ered-ményre? (8 pont)

Az elektron töltése és tömege: $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$.
A Rydberg állandó: $Ry = 13{,}6\ eV$, a Planck állandó: $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ Js$.
A fénysebesség nagysága: $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$.

Atomfizika ZH 2008. október 17. B

1. Mekkora feszültségre van kapcsolva az a vákuumbeli síkkondenzátor, amelynek lemezei 1 cm-re vannak egymástól, és egy, a negatív lemezről „leváló" elektron a fénysebesség 10%-ával csapódnak be a pozitív lemezbe? Mekkora a térerősség a lemezek között? (2 pont)

2. Egy adott fémet legfeljebb $5\cdot 10^{-7}\,m$ hullámhosszúságú fénnyel megvilágítva tapasztalunk fotoeffektust. Mekkora a fémre jellemző kilépési munka? A hullámhossz felére csökkentésével mekkora lesz a kilépő elektronok mozgási energiája? (2 pont)

3. Egy 50 m^2 nagyságú napelem mennyi energiát képes szolgáltatni 1 óra alatt, ha a bejövő energiának csak a 80%-át tudja hasznosítani? (A napelemre merőlegesen süt a Nap, mely a Föld közelében $I = 1500\ W/m^2$ egységnyi felületre jutó teljesítménnyel sugároz.) (2 pont)

4. A hidrogénatom *3.* gerjesztett állapotában mekkora az elektron energiája és a pályamozgásból származó perdülete a Bohr-modell szerint? (2 pont)

5. Ideális, egyatomos gázban egy tetszőleges részecske átlagos energiája $E = 10^{-20}\ J$. Mekkora az egy szabadsági fokra jutó átlagos energia és a gáz hőmérséklete? (2 pont)

6. Egy elektron de Broglie hullámhossza $\lambda=1,5\cdot 10^{-11}\,m$. Mekkora a teljes energiája? (2 pont)

7. Feltéve, hogy a $T_{Nap} = 6000\ K$ felszíni hőmérsékletű Nap a legtöbb fotont a $\lambda_{max} = 500\ nm$ hullámhosszon bocsátja ki, becsüld meg, hogy Te (a hőmérsékletedből kifolyólag) milyen frekvencián sugározol a legintenzívebben! (2 pont)

8. Egy kezdetben nyugalomban lévő elektronnak úgy ütközik egy foton, hogy az elektron a foton eredeti mozgásirányára merőlegesen kezd haladni. Mekkora lett a foton impulzusa? Kisebb vagy nagyobb ennél a meglökött elektron impulzusa? (4 pont)

9. Egy vékony csőben egymás mellett, azonos távolságra 3 test helyezkedik el, melyek kitöltik a cső keresztmetszetét és egy-egy ugyanolyan rugóállandójú rugó köti őket össze. A két szélső test tömege megegyezik, a középső tömege az előbbieknél nagyobb. Mekkora az átlagos energia T hőmérsékleten? (4 pont)

10. Tekintsünk egy olyan *m* tömegű részecskét, melynek jellemzője, hogy kettő belőle egyszerre nem létezhet azonos energiájú állapotban. Feltéve, hogy T hőmérsékleten egy dobozba egy ilyen részecskéből csak λhullámhosszú változat kerülhet, adjuk meg az átlagos részecskeszámot! (Útmutatás: a fotonoknál megismert módszert használjuk: alkalmazzuk a Boltzmann-statisztikát és először határozzuk meg az átlagos energiát!) (4 pont)

11. Egy 40 nA áramerősségű alfa-nyaláb (He-atommagok) esik egy vékony nátrium-fóliára. A fóliától 7 m-re található egy 3 cm^2 felületű, a fólia felé néző 80% hatásfokú detektor (azaz átlagosan 10 beütésből 8-at jelez csak), mely 1 óra alatt $2\cdot 10^5$-szer szólal meg. Feltéve, hogy a fóliában az egységnyi felületen elhelyezkedő szórócentrumok száma $5\cdot 10^{25}\ cm^{-2}$, mekkora a differenciális hatáskeresztmetszet a detektor irányában? (6 pont)

12. A Maxwell-féle sebességeloszlás szerint a valószínűség, hogy egy tetszőleges részecske sebességének nagysága egy kicsiny [v, v+dv] intervallumba essen: $P(v)dv = 4\pi(m/2k_BT\pi)^{3/2}\, v^2 \exp(-mv^2/2k_BT)\, dv$. Adjuk meg a sebesség négyzetének az átlagát! Milyen más elv alkalmazásával juthattunk volna ugyanerre az ered-ményre? (8 pont)

Az elektron töltése és tömege: $e = -1,6\cdot 10^{-19}\ C$, $m_e = 9,1\cdot 10^{-31}\ kg$.
A Rydberg-állandó: $Ry = 13,6\ eV$, a Planck állandó: $h = 6,626\cdot 10^{-34}\ Js$.
A fénysebesség nagysága: $c = 3\cdot 10^8\ m/s$.
A Boltzmann-állandó: $k_B = 1,385\cdot 10^{-23}\ J/K$.

Atomfizika ZH megoldások **A csoport**

1. A relativisztikus energia és impulzus kifejezések:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Behelyettesítve a megadott adatokat:

$$E \approx 1.24 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}\,, \quad p \approx 3.1 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

2. A hidrogénatom Bohr-modellje szerint:

$$E = -\frac{Ry}{n^2}, \quad N = n\frac{h}{2\pi}.$$

A 8. gerjesztett állapot azt jelenti, hogy $n = 9$, így

$$E \approx -0.17\,\mathrm{eV}\,, \quad N \approx 9.5 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\,.$$

3. A minimális frekvenciát a következő egyenlet adja meg:

$$h\nu_{min} = W_{ki} \longrightarrow \nu_{\mathrm{min}} \approx 1.06 \cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}\,.$$

Ha a frekvenciát kétszeresére növeljük:

$$2h\nu_{min} = W_{ki} + E_{mozg} \longrightarrow h\nu_{\mathrm{min}} = E_{mozg} = W_{ki} = 4.4\,\mathrm{eV}\,.$$

4. Az azonos tömegű, azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltések ugyanolyan sugarú körpályára állnak, csak egymással ellentétes irányba kezdenek mozogni. Emiatt ha mindegyik félkört tesz meg, akkor a becsapódási pontok távolsága $4R$ lesz, ahol R a körpálya sugara:

$$F = qvB = m\frac{v^2}{R} \longrightarrow R = \frac{mv}{qB} \approx 5.7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}\,,$$

vagyis

$$d = 4R \approx 2.3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}\,.$$

5. Használva a már feljebb idézett relativisztikus impulzus-formulát, a hullámhossz a következőképpen írható (majd behelyettesítve a megfelelő adatokat):

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \approx 4.2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}\,.$$

Mivel a fény frekvenciája $\nu = \frac{c}{\lambda}$, ezért az ilyen hullámhosszal rendelkező fény

$$\nu \approx 7.14 \cdot 10^{19}\,\mathrm{Hz}$$

frekvenciájú.

6. Feltéve, hogy a Nap fénye teljesen elnyelődik (becslésről lévén szó, ez ésszerű feltevés), a nyomás:

$$p = \frac{I}{c},$$

ahol I az egységnyi felületre érkező teljesítmény. Ha erőt akarunk számolni, akkor a sugárzásra merőleges vetületét kell az adott felületnek tekinteni, a Föld esetén ez $R_F^2\pi$ nagyságot jelent:

$$F = pR_F^2\pi \approx 6.3 \cdot 10^8\,\mathrm{N}\,.$$

7. A Wien-törvény szerint T/ν =konstans, emiatt ha az emberi hőmérsékletet $T_0 \approx 310\,\mathrm{K}$-nek tekintjük, akkor a legnagyobb energiájú fény a spektrumban

$$\nu_0 = \nu_{Nap} \cdot \frac{T_0}{T_{Nap}} \approx 3.1 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}$$

frekvenciájú. Ez

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} \approx 9.7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$$

hullámhosszat jelent.

8. A feladat szerint két részecske nem lehet azonos energiájú állapotban. Ha a dobozba csak λ hullámhosszúságú részecske kerülhet, az egyúttal az energiát is rögzíti, mivel a hullámhosszhoz egyértelműen egyetlen energiaérték tartozik. Ekkor viszont csak kétféle lehetséges állapota van a rendszernek: vagy van benne egyetlen részecske, vagy pedig nincs. Ezek rendre $E_0 = 0$ és $E_1 = \epsilon$ energiájúak, ahol ϵ egy λ hullámhosszúságú részecske energiája. A Boltzmann-statisztika szerint az egyes megvalósulási valószínűségek:

$$P(E_i) = Ne^{-E_i/k_BT},$$

ahol N a normálási faktor és mivel $\sum_i P(E_i) = 1$ kell legyen, ezért értéke

$$N = \frac{1}{1 + e^{-\epsilon/k_BT}}.$$

Ha kiszámoljuk az átlagos energiát és elosztjuk egyetlen részecske energiájával, megkapjuk az átlagos részecskeszámot.

$$\bar{E} = \sum_i E_i P(E_i) = \epsilon\frac{e^{-\epsilon/k_BT}}{1 + e^{-\epsilon/k_BT}},$$

azaz

$$\bar{n} = \frac{1}{1 + e^{\epsilon/k_BT}},$$

amit Fermi-Dirac eloszlásnak is neveznek.

9. Legyen $j < 0$. Ha N ugrás van, és a j. koordinátába akarunk érkezni, akkor $n_{bal} = \frac{N+j}{2}$ balra, illetve $n_{jobb} = \frac{N-j}{2}$ ugrás kell. Mivel az egyes valószínűségek $p_{bal} = 2/3$, $p_{jobb} = 1/3$, ezért annak a valószínűsége, hogy N lépés után j-ben legyen a részecske:

$$P_N(j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{(N-j)/2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(N+j)/2} \cdot \text{esetek száma}\,.$$

Mivel az esetek száma

$$\frac{N!}{(\frac{N+j}{2})!(\frac{N-j}{2})!},$$

ezért

$$P_N(j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{(N-j)/2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(N+j)/2} \frac{N!}{(\frac{N+j}{2})!(\frac{N-j}{2})!}.$$

Fontos, hogy $N + j$ páros kell legyen (ekkor nyilván $N - j$ is az), ellenkező esetben a valószínűség nulla. Ha $j > 0$, akkor formálisan fel kell cserélni a jobbra és balraugrások valószínűségét a kapott képletben, ezért ekkor

$$P_N(j) = \left(\frac{1}{3}\right)^{(N-j)/2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{(N+j)/2} \frac{N!}{(\frac{N+j}{2})!(\frac{N-j}{2})!}.$$

10. A feladatban a hullámhossz-változás tévesen szerepelt: a kiszóródó foton hullámhossza kétszeresére nő (nem pedig felére csökken). A Compton-féle hullámhosszváltozásra vonatkozó

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

kifejezést alkalmazva, majd kihasználva, hogy $\theta = \pi/2$, kapjuk:

$$2\lambda_0 - \lambda_0 = \lambda_0 = \frac{h}{mc} \approx 2.4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}\,.$$

Mivel a foton impulzusa felére csökkent, ezért az impulzusmegmaradás vektori alakját használva látható, hogy

$$\tan\alpha = 1/2,$$

ahol α az elektron szóródási szöge. Innen $\alpha \approx 26.6°$.

11. A 30 nA áramerősség azt jelenti, hogy másodpercenként $\Delta N_A/\Delta t \approx 1.875 \cdot 10^{11}$ db/s hidrogénion érkezik. Eszerint 1 óra alatt $N_A \approx 6.75 \cdot 10^{14}$ db ütközik a fóliával. Mivel a detektor hatásfoka 90%, ezért az események száma $5 \cdot 10^5/0.9 \approx 5.5 \cdot 10^5$ az eltelt 1 óra alatt. Mivel ismerjük az egységnyi felületre eső szórócentrumok n_B számát, ezért a hatáskeresztmetszet (a megfelelő térszögre vonatkozóan)

$$\sigma_\Omega = \frac{\text{események száma}}{N_A \cdot n_B} \approx 8.1 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{cm}^2.$$

A térszög pedig definínió szerint $\Omega = A/r^2 \approx 8 \cdot 10^{-6}$, a detektor felületének és távolságának ismeretében. Ezzel a differenciális hatáskeresztmetszet a detektor irányára vonatkozóan már meghatározható:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\sigma_\Omega}{\Omega} \approx 10^{-29}\,\mathrm{cm}^2.$$

12. A sebesség négyzetének átlaga definíció szerint

$$\bar{v^2} = \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{m}{2k_B T\pi}\right)^{3/2} v^4 e^{-mv^2/2k_BT} dv.$$

Vezessük be a $\tilde{v} = v\sqrt{\frac{m}{2k_BT}}$ integrációs változót! Ekkor az elvégzendő integrál az alábbira egyszerűsödik:

$$\bar{v^2} = \frac{8k_BT}{\sqrt{\pi}m} \int_0^\infty \tilde{v}^4 e^{-\tilde{v}^2} d\tilde{v}.$$

Vezessük be a következő, λ paramétertől függő integrált:

$$I(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tilde{v}^2} d\tilde{v}.$$

Ekkor láthatóan

$$I''(\lambda = 1) = \int_0^\infty \tilde{v}^4 e^{-\tilde{v}^2} d\tilde{v},$$

vagyis a feladat $I(\lambda)$ meghatározása. Ez viszont rögtön adódik, ha tudjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2,$$

hiszen ekkor $\tilde{x} = x/\sqrt{\lambda}$ helyettesítéssel látszik, hogy $I(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}}$. Eszerint pedig $I''(\lambda = 1) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$, tehát

$$\bar{v^2} = \frac{3k_BT}{m}.$$

Ugyanerre az eredményre juthattunk volna, ha kihasználjuk, hogy a 3 haladási szabadsági fokra átlagosan $\frac{1}{2}k_BT$ energia jut, eszerint

$$\frac{1}{2}m\bar{v^2} = \frac{3}{2}k_BT,$$

amelyből ismét $\bar{v^2} = \frac{3k_BT}{m}$ adódik.

Atomfizika ZH megoldások **B csoport**

1. Mivel a becsapódási sebesség sokkal kisebb a fény sebességénél, ezért használható a klasszikus fizikai képlet:

$$Ue = \frac{1}{2}mv^2, \quad E = U/d.$$

amelyből a feszültségre $U \approx 2.6 \cdot 10^3\,\mathrm{V}$, a térerősségre $E \approx 2.6 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ adódik.

2. A maximális hullámhosszat megadó egyenlet:

$$h\frac{c}{\lambda_{min}} = W_{ki},$$

ezért a kilépési munka $W_{ki} \approx 2.5\,\mathrm{eV}$. Ha a hullámhosszat kétszeresére növeljük:

$$h\frac{c}{\lambda_{max}/2} = W_{ki} + E_{mozg} \longrightarrow E_{mozg} = h\frac{c}{\lambda_{max}} = W_{ki} \approx 2.5\,\mathrm{eV}.$$

3. Ha $1\,\mathrm{m}^2$-re $1\,\mathrm{s}$ alatt $1500\,\mathrm{J}$ energia érkezik, akkor $t = 1$ óra alatt $A = 50\,\mathrm{m}^2$-re

$$E = I \cdot A \cdot t \approx 2.7 \cdot 10^8\,\mathrm{J}$$

energia jön be. Ennek csak a 80% -át hasznosítja a napelem, ami $2.16 \cdot 10^8\,\mathrm{J}$.

4. A hidrogénatom Bohr-modellje szerint:

$$E = -\frac{Ry}{n^2}, \quad N = n\frac{h}{2\pi}.$$

A 3. gerjesztett állapot azt jelenti, hogy $n = 4$, így

$$E \approx -0.85\,\mathrm{eV}, \quad N \approx 4.2 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}.$$

5. Egyatomos gáz esetén a szabadsági fokok száma $f = 3$, ezért egy részecske energiája $E = \frac{3}{2}k_BT$, amely szerint az egy szabadsági fokra jutó energia $E/3 \approx 0.33 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J}$. Egyúttal az is látszik, hogy a hőmérséklet $T \approx 481\,\mathrm{K}$.

6. A relativisztikus energia az impulzussal kifejezve a következő:

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}.$$

Mivel a hullámhossz de Broglie nyomán $\lambda = h/p$, ezért ezt az impulzusra kifejezve, majd behelyettesítve az $E \approx 8.3 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}$ eredményt kapjuk.

7. A Wien-törvény szerint $T \cdot \lambda =$ konstans, emiatt ha az emberi hőmérsékletet $T_0 \approx 310\,\mathrm{K}$-nek tekintjük, akkor a legnagyobb energiájú fény a spektrumban

$$\lambda_0 = \lambda_{Nap} \cdot \frac{T_{Nap}}{T_0} \approx 10^{-5}\,\mathrm{m}$$

hullámhosszú. Ez

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \approx 3.1 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}$$

frekvenciának felel meg.

8. Compton-szórás során a foton hullámhosszának a megváltozása:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Mivel a feladat szerint az elektron a beeső fotonra merőleges irányú impulzussal rendelkezik, ezért az impulzusmegmaradás egyenletének x komponense szerint:

$$\lambda_1 \cos\theta = \lambda_2,$$

amelyből kifejezve $\cos\theta$ -t, majd beírva a fenti egyenletbe a

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc\lambda_1}(\lambda_1 - \lambda_2)$$

összefüggést kapjuk. Mivel a baloldal saját magának (-1)-szeresével arányos, az arányossági tényezőről pedig tudjuk, hogy pozitív, ezért mindkét oldalnak nullával kell egyenlőnek lennie, ami a $\lambda_1 = \lambda_2$ egyenlőséget jelenti. Ez azt jelenti, hogy a foton valójában nem is szóródott az elektrononon, ezért annak lendülete továbbra is zérus maradt, ami kisebb, mint a fotoné.

9. A feladat a szabadsági fokok meghatározása. Mivel a rendszer be van kényszerítve egy csőbe, ezért a haladó szabadsági fokok száma 1-re redukálódik, forogni nem tud, a térben 3 független rezgési módus közül most, 1 dimenzióban csak 2 tud működni. A rezgésekhez viszont $2-2$ szabadsági fok tartozik, amely a relatív mozgásokhoz tartozó kinetikus-, illetve a rugóenergiából származik. Ennek megfelelően összesen 5 szabadsági fokkal rendelkezik az objektum, melynek következtében T hőmérsékleten az átlagos energiája

$$E = \frac{5}{2}k_B T.$$

10. A feladat szerint két részecske nem lehet azonos energiájú állapotban. Ha a dobozba csak λ hullámhosszúságú részecske kerülhet, az egyúttal az energiát is rögzíti, mivel a hullámhosszhoz egyértelműen egyetlen energiaérték tartozik. Ekkor viszont csak kétféle lehetséges állapota van a rendszernek: vagy van benne egyetlen részecske, vagy pedig nincs. Ezek rendre $E_0 = 0$ és $E_1 = \epsilon$ energiájúak, ahol ϵ egy λ hullámhosszúságú részecske energiája. A Boltzmann-statisztika szerint az egyes megvalósulási valószínűségek:

$$P(E_i) = Ne^{-E_i/k_B T},$$

ahol N a normálási faktor és mivel $\sum_i P(E_i) = 1$ kell legyen, ezért értéke

$$N = \frac{1}{1 + e^{-\epsilon/k_B T}}.$$

Ha kiszámoljuk az átlagos energiát és elosztjuk egyetlen részecske energiájával, megkapjuk az átlagos részecskeszámot.

$$\bar{E} = \sum_i E_i P(E_i) = \epsilon\frac{e^{-\epsilon/k_B T}}{1 + e^{-\epsilon/k_B T}},$$

azaz

$$\bar{n} = \frac{1}{1 + e^{\epsilon/k_B T}},$$

amit Fermi-Dirac eloszlásnak is neveznek.

11. A 40 nA áramerősség azt jelenti, hogy másodpercenként $\Delta N_A/\Delta t \approx 1.25 \cdot 10^{11}$ db/s α-részescske érkezik. Eszerint 1 óra alatt $N_A \approx 4.5 \cdot 10^{14}$ db ütközik a fóliával. Mivel a detektor hatásfoka 80%, ezért az események száma $2 \cdot 10^5/0.8 = 2.5 \cdot 10^5$ az eltelt 1 óra alatt. Mivel ismerjük az egységnyi felületre eső szórócentrumok n_B számát, ezért a hatáskeresztmetszet (a megfelelő térszögre vonatkozóan)

$$\sigma_\Omega = \frac{\text{események száma}}{N_A \cdot n_B} \approx 1.1 \cdot 10^{-35}\,\text{cm}^2.$$

A térszög pedig definínió szerint $\Omega = A/r^2 \approx 6.1 \cdot 10^{-6}$, a detektor felületének és távolságának ismeretében. Ezzel a differenciális hatáskeresztmetszet a detektor irányára vonatkozóan már meghatározható:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\sigma_\Omega}{\Omega} \approx 1.8 \cdot 10^{-30}\,\text{cm}^2.$$

12. A sebesség négyzetének átlaga definíció szerint

$$\bar{v^2} = \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{m}{2k_B T \pi}\right)^{3/2} v^4 e^{-mv^2/2k_B T} dv.$$

Vezessük be a $\tilde{v} = v\sqrt{\frac{m}{2k_B T}}$ integrációs változót! Ekkor az elvégzendő integrál az alábbira egyszerűsödik:

$$\bar{v^2} = \frac{8k_B T}{\sqrt{\pi} m} \int_0^\infty \tilde{v}^4 e^{-\tilde{v}^2} d\tilde{v}.$$

Vezessük be a következő, λ paramétertől függő integrált:

$$I(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda \tilde{v}^2} d\tilde{v}.$$

Ekkor láthatóan

$$I''(\lambda = 1) = \int_0^\infty \tilde{v}^4 e^{-\tilde{v}^2} d\tilde{v},$$

vagyis a feladat $I(\lambda)$ meghatározása. Ez viszont rögtön adódik, ha tudjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2,$$

hiszen ekkor $\tilde{x} = x/\sqrt{\lambda}$ helyettesítéssel látszik, hogy $I(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}}$. Eszerint pedig $I''(\lambda = 1) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$, tehát

$$\bar{v^2} = \frac{3k_B T}{m}.$$

Ugyanerre az eredményre juthattunk volna, ha kihasználjuk, hogy a 3 haladási szabadsági fokra átlagosan $\frac{1}{2}k_B T$ energia jut, eszerint

$$\frac{1}{2} m \bar{v^2} = \frac{3}{2} k_B T,$$

amelyből ismét $\bar{v^2} = \frac{3k_B T}{m}$ adódik.