ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak **VIZSGADOLGOZAT** β **változat** **2009. május 28.**
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (14 pont)

a) Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{(y^2+3)\,x}{(y^2-4)\,e^{-3x^2}}\,, \qquad |y| \neq 2$$

(Elég az implicit alak.)

b) $a_4\, y^{(4)} + a_3\, y''' + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0\,, \qquad a_i \in \mathbb{R}$

Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását, ha $2x + e^{-2x}\sin 3x$ megoldja a differenciálegyenletet.

a) $\boxed{10}$

$$\int \underbrace{\frac{y^2-4}{y^2+3}}\, dy = \int x e^{3x^2}\, dx \qquad 2$$

$$\frac{(y^2+3)-7}{y^2+3}$$

$$\int \left(1 - \frac{7}{3}\,\frac{1}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) dy = \frac{1}{6}\int 6x\, e^{3x^2}\, dx$$

$$y - \frac{7}{3}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{6}\, e^{3x^2} + C$$

4 3 1

b) $\boxed{4}$

x megoldás $\Rightarrow$ $\lambda_{1,2} = 0$

$e^{-2x}\sin 3x$ megoldás $\Rightarrow$ $\lambda_{3,4} = -2 \pm j3$

A megoldás:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x}\cos 3x + C_4 e^{-2x}\sin 3x$$

$C_i \in \mathbb{R}$

2. feladat (15 pont)

a) Legyen f legalább $n+1$- szer differenciálható x_0 egy környezetében!
Mit nevezünk az f függvény x_0 bázispontú, n-edrendű Taylor polinomjának, illetve a hozzá tartozó Lagrange féle maradéktagjának?

b) Bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

an2v-090528/1.

a.) $\boxed{8}$

Ⓓ A legalább n-szer differenciálható f függvény x_0 bázispontú n-edrendű Taylor polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

(4)

Lagrange-féle alakban felírt maradéktag

Ⓣ Ha f legalább $(n+1)$-szer differenciálható $K_{x_0,\delta}$-ban és $x \in K_{x_0,\delta}$, akkor $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ (ill. $\xi \in (x, x_0)$), hogy

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}.$$

(4)

b.) $\boxed{7}$

Ⓣ Legyen f legalább n-szer differenciálható K_{x_0}-ban. Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0;$$

Tehát $R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$ az x_0-ban.

Ⓜ A közelítés jóságát mutatja a tétel.

Ⓑ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} \overset{\text{L'H}}{=}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - T_n''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} \overset{\text{L'H}}{=} \underset{n \text{ lépés után}}{\cdots} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x)}{n!\,(x - x_0)^{n-n}} = \frac{0}{n!} = 0$$

(Az utolsó tört kivételével a törtek $\frac{0}{0}$ alakúak, ezért alkalmazhattuk a L'Hospital szabályt.)

■

3. feladat (17 pont)

a) Ismertesse a binomiális sort!
   Mennyi a konvergenciasugara? Állítását bizonyítsa be!

b)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + 7x^3}}$$

Határozza meg az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!
$a_9 = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

a.) $\boxed{9}$ $\alpha \neq -1$ esetén

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

(2)

Ⓣ $R = 1$ (1)

an2 v 090528/2.

(B) $a_k = \binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}$

$$a_{k+1} = \binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{(k+1)!} = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 = \frac{1}{R} \Rightarrow R=1$$ (6)

b.) $\boxed{8}$ $f(x) = (1+7x^3)^{-1/4} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/4}{k}(7x^3)^k =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/4}{k}7^k x^{3k}$$ (4)

$$|7x^3| = 7|x|^3 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{7}} = R$$ (2)

$$a_9 = \binom{-1/4}{3}7^3 = \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{9}{4}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}7^3$$ (2)

4. feladat (11 pont)

$$f(x,y) = \frac{(y+1)\,\cos(2x)}{y-2}$$

a) $f'_x(x,y) = ?$; $f'_y(x,y) = ?$

b) $\underline{e} \parallel -3\,\underline{i} + 4\,\underline{j}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)} = ?$

c) $\max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)} = ?$ Mely irányban kapjuk ezt az értékét!

a.) $\boxed{4}$ $f_x' = -2\sin 2x \dfrac{y+1}{y-2}$ (2)

$$f_y' = \cos 2x \frac{1\cdot(y-2)-(y+1)}{(y-2)^2}$$ (2)

b.) $\boxed{4}$ $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\cdot\underline{e}$ (2)

$$\underline{e} = -\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}$$ (1)

$$\operatorname{grad} f\left(\frac{\pi}{2},1\right) = 0\cdot\underline{i} + 3\underline{j}$$

$$\frac{df}{d\underline{e}} = +3\cdot\frac{4}{5} = +\frac{12}{5}$$ (1)

c.) $\boxed{3}$ $\max \left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)} = \left|\operatorname{grad} f\left(\frac{\pi}{2},1\right)\right| = 3$ (2)

$$\underline{e} = +\underline{j}$$ (1)

an2v 090528/3.

5. feladat (12 pont)*

Írja fel az

$$f(x) = \begin{cases} -2\,, & \text{ha} \quad x \in [-\pi\,, 0) \\ 2\,, & \text{ha} \quad x \in [0\,, \pi) \end{cases} \qquad , \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

Írja fel az 2π szerint periodikus f függvény Fourier sorát!
Jelölje $\phi(x)$ a Fourier sor összegfüggvényét! $\phi(0) = ?$, $\phi(\pi/2) = ?$

Ha a szakadási pontokban megváltoztatjuk a függvény értékét 0-ra (ez nem változtat az együtthatók kiszámítására szolgáló integrálok értékén), akkor páratlan függvényt kapunk.

Ezért $a_k = 0$, $k = 0, 1 \dots$ 3

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin kx}_{\text{páros}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\sin kx\,dx = \frac{4}{\pi}\,\frac{-\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{k}\,(-\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k} + 1) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros} \\ \frac{8}{\pi}\,\frac{1}{k}, & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases} \quad 4$$

$$\phi(x) = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right) \quad 2$$

$$\phi(0) = 0 \quad \left(= \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2}\right) \quad 2$$

$$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \quad \left(= f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad 1$$

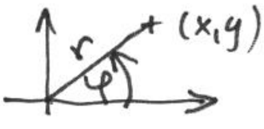
6. feladat (15 pont)*

a) Ismertesse a síkbeli polárkoordinátás transzformációt és vezesse le a Jacobi determinánsának az értékét!

b)

$$\iint_T 5\,y\,x^2\,\mathrm{d}T = ?\,, \qquad T: \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4\,,\ x \ge 0\,,\ y \ge x\,,\ y \le \sqrt{3}\,x$$

a.)



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$ 2

$$J = \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = \quad 5$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

b)

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3}\int_{1}^{2} 5\, r\sin\varphi\; r^2\cos^2\varphi\; r\, dr\, d\varphi =$$ 4

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin\varphi\cos^2\varphi\; \underbrace{r^5\Big|_1^2}_{32-1=31}\, d\varphi \quad (2) \quad = 31\; \frac{-\cos^3\varphi}{3}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3} = -\frac{31}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^3\right)$$ 2

7. feladat (16 pont)*

a) Igazolja, hogy az e^z függvény periodikus!
Oldja meg az $e^z = 0$ egyenletet!

b) Határozza meg az alábbi integrálok valós és képzetes részét!

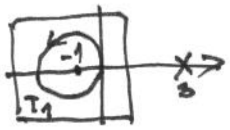
$$I_1=\oint_{|z+1|=1}\frac{e^{jz}}{(z-3)^2}\,dz\,, \qquad I_2=\oint_{|z|=4}\frac{e^{jz}}{(z-3)^2}\,dz$$

a.) $\boxed{6}$ e^z $2\pi j$ szerint periodikus, mert

$$e^{z+2\pi j}=e^{x+j(y+2\pi)}=e^x(\underbrace{\cos(y+2\pi)}_{=\cos y}+j\underbrace{\sin(y+2\pi)}_{=\sin y})=e^z$$ 3

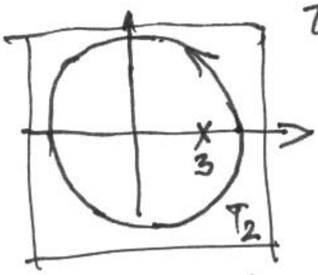
$e^z\neq 0$, mert $|e^z|=e^x>0$ ($\nexists z$, melyre $e^z=0$) 3

b.) $\boxed{10}$



$I_1=0$, mert $\frac{e^{jz}}{(z-3)^2}$ reguláris T_1-en
(Cauchy-féle alaptétel)

Tehát $\operatorname{Re} I_1=0$, $\operatorname{Im} I_1=0$



$$I_2=\oint_{|z|=4}\frac{e^{jz}}{(z-3)^2}\,dz$$ (e^{jz} reg T_2-ön (sőt mindenütt))

$z_0=3$; $n+1=2 \Rightarrow n=1$

A Cauchy-féle általánosított integrálformulával:

$$I_2=\frac{2\pi j}{1!}\left(e^{jz}\right)'\Big|_{z=3}=2\pi j\; j e^{jz}\Big|_{z=3}=-2\pi e^{j3}=$$
$$=-2\pi(\cos 3+j\sin 3)$$

$\operatorname{Re} I_2=-2\pi\cos 3$

$\operatorname{Im} I_2=-2\pi\sin 3$

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

8. feladat (9 pont)

Adja meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+2}}{n\ 3^{2n}} \quad (x-5)^n$$

$$a_n = \frac{9(-3)^n}{n \cdot 9^n} \quad ; \quad x_0 = 5$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{9} \cdot 3}{\sqrt[n]{n} \cdot 9} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 9} = \frac{1}{3} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 3 \quad 5$$

2 5 8

3

$x = 2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9(-3)^n}{n \cdot 9^n} (-3)^n = 9 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div.

$x = 8$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9(-3)^n}{n \cdot 9^n} \cdot 3^n = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konv. (Leibniz sor)

K. T.: $(2, 8]$ 1

9. feladat (11 pont)

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

Írja fel az f függvény origó körüli, valamint $x_0 = 4$ körüli Taylor sorait és azok konvergenciasugarait!

$x_0 = 0$: $\displaystyle f(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3^{n+1}} x^n$ 3

$\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 3$: $R_1 = 3$ 2

$x_0 = 4$: $\displaystyle f(x) = \frac{1}{(x-4)+1} = \frac{1}{1 - (-(x-4))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-(x-4))^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-4)^n$ 4

$|-(x-4)| = |x-4| < 1 \Rightarrow R_2 = 1$ 2