INFOANALÍZIS2 3.ZH JAV

2016 december 14.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD
GYAK VEZ

1. Feladat. Határozzuk meg, hogy hol és milyen lokális szélsőértékei vannak az

$$f(x, y) := 4xy - x^4 - y^4$$

függvénynek.

2. Feladat. Adjuk meg az $f(x, y) := xy(18 - x - y)$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét és ezek helyét a $[0, 12] \times [0, 12]$ négyzeten.

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy.$$

4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dx\, dy.$$

5. Feladat. Adjuk meg az $f(x, y) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ függvény kettős integrálját az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott T tartományon

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq 4 \\ x^2 + y^2 &\leq 16 \\ y &\geq 0 \\ y &\leq \frac{x}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

1. Feladat. Határozzuk meg, hogy hol és milyen lokális szélsőértékei vannak az

$$f(x,y) := 4xy - x^4 - y^4$$

függvénynek.

Megoldás. A parciális deriváltak $\boxed{\textbf{2p}}$

$$f'_x(x,y) = 4y - 4x^3$$
$$f'_y(x,y) = 4x - 4y^3.$$

A

$$4y - 4x^3 = 0$$
$$4x - 4y^3 = 0$$

egyenletrendszer megoldása $\boxed{\textbf{3p}}$

$$x'_1 = 0,\ y'_1 = 0,$$
$$x'_2 = 1,\ y'_2 = 1,$$
$$x'_3 = -1,\ y'_3 = -1.$$

A Hesse mátrix $\boxed{\textbf{2p}}$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{bmatrix}.$$

(a) Mivel

$$\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

indefinit, nincs szélsőérték. $\boxed{\textbf{1p}}$

(b) Mivel

$$\det H(1,1) = \begin{vmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{vmatrix}$$

negatív definit, lokális maximuma van. $\boxed{\textbf{1p}}$

(c) Mivel

$$\det H(-1,-1) = \begin{vmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{vmatrix}$$

negatív definit, lokális maximuma van. $\boxed{\textbf{1p}}$ ■

---

2. Feladat. Adjuk meg az $f(x,y) := xy(18-x-y)$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét és ezek helyét a $[0,12]\times[0,12]$ négyzeten.

Megoldás. (1) A tartomány belsejében: $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$f'_x(x,y) = y(18-x-y) + xy(-1)$$
$$f'_y(x.y) = x(18-x-y) + xy(-1).$$

A

$$18-2x-y=0$$
$$18-x-2y=0$$

egyenletrendszer megoldása $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$x'_1 = 6,\ y'_1 = 6.$$

(2) $x = 12$, $0 \le y \le 12$.
Ekkor $f(12,y) = 72y - 12y^2$. Így kapjuk $\boxed{\mathbf{3p}}$

$$x'_2 = 12,\ y'_2 = 0$$
$$x'_3 = 12,\ y'_3 = 3$$
$$x'_4 = 12,\ y'_4 = 12.$$

(3) $y = 12$, $0 \le x \le 12$.
Ekkor $f(x,12) = 72x - 12x^2$. Így kapjuk $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$y'_5 = 12,\ x'_5 = 0$$
$$y'_6 = 12,\ x'_6 = 3$$
$$y'_7 = 12,\ x'_7 = 12.$$

(4) $x = 0$ vagy $y = 0$. Ekkor az f függvény konstans, 0. $\boxed{\mathbf{1p}}$
Előzőek alapján, $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$(6,6)\ \text{max. hely, értéke } f(6,6) = 216.$$
$$(12,12)\ \text{min. hely, értéke } f(12,12) = -864. \quad \blacksquare$$

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy.$$

Megoldás. Az integrandus az adott tartományon folytonos, tehát az integrál létezik $\boxed{\mathbf{1p}}$. Az e^{x^2} függvénynek nincs elemi függvényekkel kifejezhető primitív függvénye. Ha a tartományon fordított sorrendben integrálunk $\boxed{\mathbf{1p}}$,

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_0^1 \left[y e^{x^2} \right]_0^x dy \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_0^1 x e^{x^2} dx \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1). \quad \blacksquare$$

---

4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dx\; dy.$$

Megoldás. Az integrandus az adott tartományon folytonos, tehát az integrál létezik $\boxed{\mathbf{1p}}$. Ha a tartományon fordított sorrendben integrálunk $\boxed{\mathbf{1p}}$:

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dx\; dy \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_1^2 \int_1^{x^2} \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dy\; dx \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_1^2 \left[y \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \right]_1^{x^2} dx$$

$$\overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_1^2 (x^2 - 1) \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\; dx \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \left[-\cos\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \right]_1^2 = -\cos\frac{2}{3} + \cos\frac{2}{3} = 0. \quad \blacksquare$$

---

5. Feladat. Adjuk meg az $f(x,y) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ függvény kettős integrálját az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott T tartományon

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq 4 \\ x^2 + y^2 &\leq 16 \\ y &\geq 0 \\ y &\leq \frac{x}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Megoldás. Polárkoordinátákra térünk át:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \boxed{\mathbf{2p}} \quad 2 \leq r \leq 4,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}. \boxed{\mathbf{2p}}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\int_T \arctan\left(\frac{y}{x}\right) d\lambda_2 &\overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_{T'} \arctan\left(\frac{r\sin(\varphi)}{r\cos(\varphi)}\right) \cdot r\,dr\,d\varphi \\
&\overset{\boxed{\mathbf{1p}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_2^4 \arctan(\tan(\varphi)) r\,dr\,d\varphi \\
&\overset{\boxed{\mathbf{1p}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_2^4 \varphi r\,dr\,d\varphi \\
&\overset{\boxed{\mathbf{1p}}}{=} \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \varphi\,d\varphi\right) \left(\int_2^4 r\,dr\right) \\
&\overset{\boxed{\mathbf{1p}}}{=} 3\left(\frac{\pi}{6}\right)^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$
