Algoritmuselmélet zárthelyi

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. 2013. április 3.
Kérjük, minden résztvevő **nevét**, **NEPTUN kódját**, a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Ezen kívül a legfelső lapra írja rá **gyakorlatvezetője nevét** is (akihez a NEPTUN szerint jár).
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a (legalább elégséges) zh pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

1. Mi az a legkisebb r racionális szám, melyre teljesül, hogy $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} = O(n^r)$?

2. Egy $A[i,j]$ $n \times n$-es táblázat minden mezőjébe egy egész szám van írva (nem feltétlenül csak pozitívak). Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy melyik az a téglalap alakú része a táblázatnak, melynek bal felső sarka egybe esik a nagy táblázat bal felső sarkával és benne az elemek összege az (egyik) legnagyobb. (Vagyis olyan k, l-t keresünk, amire $\sum_{\substack{i\le k,\\ j\le l}} A[i,j]$ maximális.)
(Feltételezzük, hogy az alapműveletek bármekkora számokkal 1 lépésben elvégezhetőek.)

3. Kaphatjuk-e az $1, 7, 3, 6, 11, 15, 22, 17, 14, 12, 9$ számsorozatot úgy, hogy egy (a szokásos rendezést használó) bináris keresőfában tárolt elemeket posztorder sorrendben kiolvasunk?

4. Adjacencia-mátrixával adott n csúcsú, irányított gráfként ismerjük egy város úthálózatát. El szeretnénk jutni A pontból B pontba, de sajnos minden csomópontban várnunk kell a nagy hóesés miatt, a várakozás hossza minden csomópontra ismert és független attól, hogy merre akarunk továbbmenni. Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben eldönti, hogy merre menjünk, hogy a lehető legkevesebbet kelljen várni összességében. *(A csómópontok közötti utak hosszának megtétele a várakozáshoz képest elhanyagolható időbe telik, tekintsük 0-nak. A-ban és B-ben nem kell várakozni.)*

5. Adjacencia-mátrixával adott n csúcsú, élsúlyozott, irányítatlan gráfként ismerjük egy ország úthálózatát (a csomópontok a városok, az élek a közvetlen összeköttetések a városok között). Az élek súlya a városok közti távolságot adja meg. (Feltehetjük, hogy a távolságok egészek.) Adjon $O(n^6)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy lehetséges-e úgy kiválasztani öt várost, hogy ezektől bármely más város legfeljebb 50 kilométerre van. *(Ezekbe a városokba lenne érdemes hókotrókat telepíteni.)*

6. Egy tömbben adott n darab 0-tól különböző egész szám (lehetnek negatívak is köztük) és adott egy k egész szám is. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy melyik az a k elem a tömbben, melyek szorzata maximális.

7. Az $A[1..2013]$ tömbben egy kupac adatstruktúrát tárolunk, minden tárolt elem különböző. Tudjuk, hogy ebben a kupacban a legnagyobb elem $A[i]$. Határozza meg i összes lehetséges értékét!

8. Igaz-e, hogy egy piros-fekete fa tetszőleges belső fekete csúcsához tartozó részfa (az a részfa, aminek ez a fekete csúcs a gyökere) is egy piros-fekete fa? Igaz-e ugyanez egy tetszőleges belső piros csúcshoz tartozó részfára?