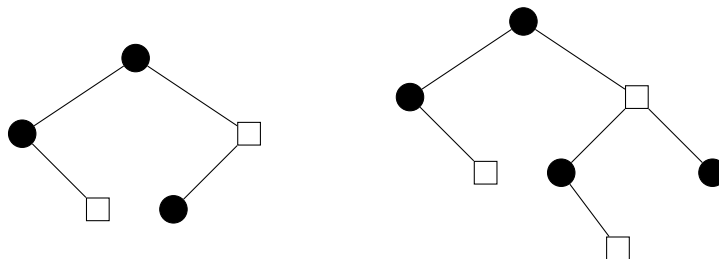


Keresőfák

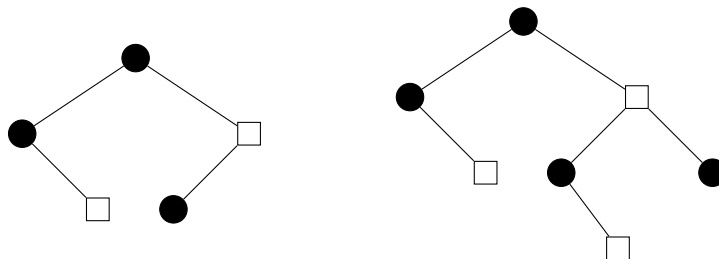
1. Igazolja, hogy nincs olyan összehasonlításokkal rendező algoritmus, amelynél akármi is a bemenet, minden elem legfeljebb 2000 összehasonlításban szerepel!
2. Adjon egy  $O(n)$  időigényű algoritmust  $n$  olyan egész számból álló sorozat rendezésére, melynek elemei az
  - (a)  $\{1, \dots, 3n\}$  halmazból vannak!
  - (b)  $\{1, \dots, n^3 - 1\}$  halmazból vannak!
3. A  $G = (V, E)$  többszörös élet nem tartalmazó irányított gráf csúcshalmaza legyen  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Tegyük fel, hogy a gráf olyan éllistával adott, amelyben minden csúcsnál a szomszédok tetszőleges sorrendben vannak felsorolva. Adjon algoritmust, ami  $O(|V| + |E|)$  lépésben olyan éllistát hoz létre, amiben a szomszédok minden csúcsnál növekvő sorrendben vannak!
4. Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Mely  $x$  egész számokra lehetséges, hogy egy  $KERES(x)$  hívás során a keresési út mentén a 20, 18, 3, 15, 5, 8, 9 kulcsokat látjuk ebben a sorrendben?
5. (a) Építsen beszúrásokkal bináris keresőfát az alábbi sorrendben érkező számokból: 7, 3, 2, 9, 8, 12, 6, 4.  
 (b) Járja be pre-, in-, és posztorder bejárással a kapott fát!  
 (c) Az (a) rész keresőfáján hajtsa végre az alábbi műveletsort: BESZÚR(5), TÖRÖL(2), TÖRÖL(7), TÖRÖL(6).
6. Egy bináris fa csúcsai 0 és 9 közötti egész számokkal vannak megcímkézve. Az inorder bejárás során a címkék sorrendje: 9, 3, 1, 0, 4, 2, 7, 6, 8, 5, a posztorder bejárásnál pedig 9, 1, 4, 0, 3,  $x$ , 7, 5,  $y$ , 2. Mi lehet az  $x$  és mi az  $y$ ?
7. Határozza meg azokat a bináris fákat, amelyekben a preorder bejárás szerinti sorrend éppen a posztorder bejárás által adott sorrend fordítottja!
8. Az  $A$  keresőfában  $n$  egész számot, a  $B$ -ben pedig  $m$ -et tárolunk. Rendezzük az  $n + m$  elemet  $O(n + m)$  lépésben!
9. Igazolja, hogy minden olyan algoritmus, ami csak összehasonlításokkal fel tud építeni egy bináris keresőfát  $n$  elem esetén  $\Omega(n \log n)$  összehasonlítást használ!
10. Adott egy  $n$  csúcsú bináris keresőfa. Ennek minden  $v$  csúcsára meg akarjuk határozni, hogy a  $v$  gyökerű részében hány darab  $v$ -nél kisebb elem van tárolva. Adjon algoritmust, ami ezt a feladatot  $O(n)$  lépésben megoldja!
11. Lehetséges-e hogy az alábbi ábrákon egy-egy piros-fekete fa csúcsait ábrázoltuk? (A levelek nincsenek feltüntetve, a fekete kör fekete csúcsot, a fehér négyzet piros csúcsot jelöl.)



12. Egy piros-fekete fában valamelyik, a gyökértől egy levélig vezető úton sorban az alábbi színű csúcsok vannak: fekete, piros, fekete, fekete. Mennyi a fában tárolt elemek számának a minimuma?
13. Mennyi a tárolható elemek számának minimuma, illetve maximuma egy olyan piros-fekete fában, aminek a fekete magassága 3?
14. Egy piros-fekete fában jelölje  $x$  és  $y$  a gyökér két fiát. Tudjuk, hogy  $fm(x) = fm(y)$ , de az  $x$  csúcs két gyerekének különbözik a fekete magassága. Milyen színű az  $y$  csúcs?

Keresőfák

- Igazolja, hogy nincs olyan összehasonlításokkal rendező algoritmus, amelynél akármi is a bemenet, minden elem legfeljebb 2000 összehasonlításban szerepel!
- Adjon egy  $O(n)$  időigényű algoritmust  $n$  olyan egész számból álló sorozat rendezésére, melynek elemei az
  - $\{1, \dots, 3n\}$  halmazból vannak!
  - $\{1, \dots, n^3 - 1\}$  halmazból vannak!
- A  $G = (V, E)$  többszörös élel nem tartalmazó irányított gráf csúcshalmaza legyen  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Tegyük fel, hogy a gráf olyan éllistával adott, amelyben minden csúcsnál a szomszédok tetszőleges sorrendben vannak felsorolva. Adjon algoritmust, ami  $O(|V| + |E|)$  lépésben olyan éllistát hoz létre, amiben a szomszédok minden csúcsnál növekvő sorrendben vannak!
- Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Mely  $x$  egész számokra lehetséges, hogy egy  $KERES(x)$  hívás során a keresési út mentén a 20, 18, 3, 15, 5, 8, 9 kulcsokat látjuk ebben a sorrendben?
- Építsen beszúrásokkal bináris keresőfát az alábbi sorrendben érkező számokból: 7, 3, 2, 9, 8, 12, 6, 4.
  - Járja be pre-, in-, és posztorder bejárással a kapott fát!
  - Az (a) rész keresőfáján hajtsa végre az alábbi műveletsort: BESZÚR(5), TÖRÖL(2), TÖRÖL(7), TÖRÖL(6).
- Egy bináris fa csúcsai 0 és 9 közötti egész számokkal vannak megcímkézve. Az inorder bejárás során a címkék sorrendje: 9, 3, 1, 0, 4, 2, 7, 6, 8, 5, a posztorder bejárásnál pedig 9, 1, 4, 0, 3,  $x$ , 7, 5,  $y$ , 2. Mi lehet az  $x$  és mi az  $y$ ?
- Határozza meg azokat a bináris fákat, amelyekben a preorder bejárás szerinti sorrend éppen a posztorder bejárás által adott sorrend fordítottja!
- Az  $A$  keresőfában  $n$  egész számot, a  $B$ -ben pedig  $m$ -et tárolunk. Rendezzük az  $n + m$  elemet  $O(n + m)$  lépésben!
- Igazolja, hogy minden olyan algoritmus, ami csak összehasonlításokkal fel tud építeni egy bináris keresőfát  $n$  elem esetén  $\Omega(n \log n)$  összehasonlítást használ!
- Adott egy  $n$  csúcsú bináris keresőfa. Ennek minden  $v$  csúcsára meg akarjuk határozni, hogy a  $v$  gyökerű részében hány darab  $v$ -nél kisebb elem van tárolva. Adjon algoritmust, ami ezt a feladatot  $O(n)$  lépésben megoldja!
- Lehetséges-e hogy az alábbi ábrákon egy-egy piros-fekete fa csúcsait ábrázoltuk? (A levelek nincsenek feltüntetve, a fekete kör fekete csúcsot, a fehér négyzet piros csúcsot jelöl.)



- Egy piros-fekete fában valamelyik, a gyökértől egy levélig vezető úton sorban az alábbi színű csúcsok vannak: fekete, piros, fekete, fekete. Mennyi a fában tárolt elemek számának a minimuma?
- Mennyi a tárolható elemek számának minimuma, illetve maximuma egy olyan piros-fekete fában, aminek a fekete magassága 3?
- Egy piros-fekete fában jelölje  $x$  és  $y$  a gyökér két fiát. Tudjuk, hogy  $fm(x) = fm(y)$ , de az  $x$  csúcs két gyerekének különbözik a fekete magassága. Milyen színű az  $y$  csúcs?