

1. A matematikai mintavételezés T mintavételi idővel felfogható modulációs eljárásnak, ahol a hordozó jel $i_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$ eltolt Dirac impulzusokból áll. Adja meg a hordozó jel $I(s)$ T Laplace-transzformáltját és annak pólusait. Segítség: Használja a geometriai sor összegképletét.

$i_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$
 hordozó jel Laplace-transzformáltja

$$I_T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

A Laplace-transzformált pólusai az $1 - e^{-sT} = 0$ feltételből határozhatók meg.

$$1 - e^{-sT} = 1 - e^{jk2\pi} \gg s_k = -k \frac{2\pi}{T} j \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2. Legyen $f(t)$ az analóg jel, $F(s)$ az analóg jel Laplace-transzformáltja, T a mintavételi idő $i_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$ a hordozó jel és $f_t^*(t) = f(t)i_T(t)$ a matematikailag mintavételezett jel. Adja meg a matematikailag mintavételezett jelnek a komplex konvolúciós tételből következő $F^*(s)$ Laplace-transzformáltját. Periódikus-e az $F^*(j\omega)$ függvény, és ha igen, akkor mi a periódus hossza.

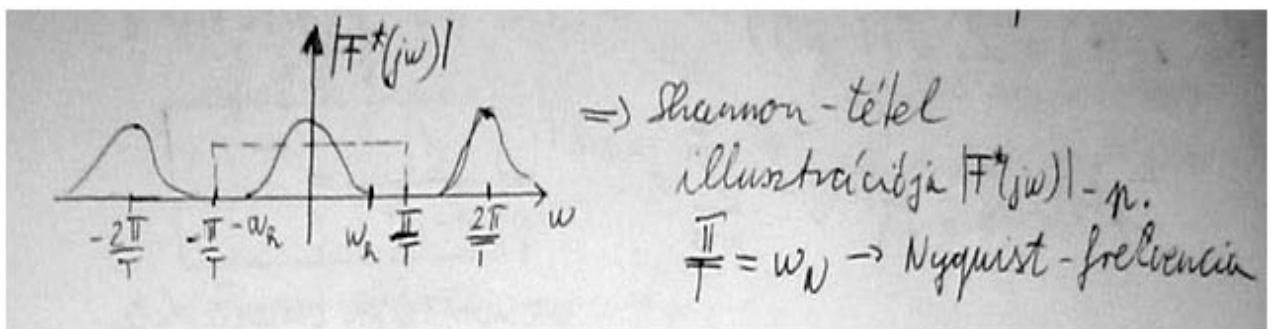
$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + jk \frac{2\pi}{T})$$

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j(\omega + k \frac{2\pi}{T}))$$

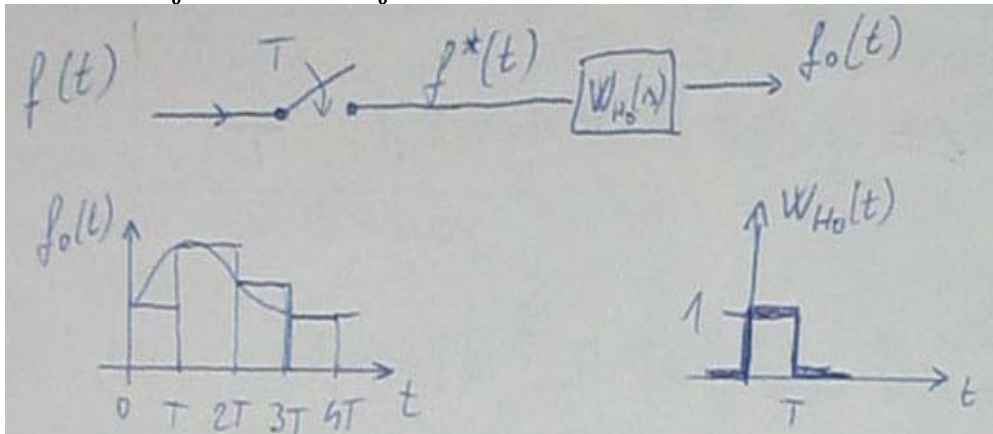
$F^*(j\omega)$ periodikus és a periódus hossza $\frac{2\pi}{T}$

3. Legyen az $f(t)$ analóg jel sávkorlátozott és határ-körfrekvenciája $\omega_h = 2\pi f_h$. Adja meg a Shannon-tételt az analóg jel rekonstruálásáról a matematikailag mintavételezett jelből. Rajzolja fel a matematikailag mintavételezett jel frekvencia függvényének $F^*(j\omega)$ amplitúdó-függvényét és illusztrálja azon a Shannon-tételt. Mi az N w Nyquist-frekvencia definíciója a szabályozástechnikában?

Ha az analóg jel sávkorlátozott és határ-körfrekvenciája $\omega_h = 2\pi f_h$, továbbá a mintavételi idő kielégíti a $T \leq \frac{\pi}{\omega_h} = \frac{1}{2f_h}$ feltételt, akkor az analóg jel rekonstruálható a matematikailag mintavételezett jelből (az analóg jel mintáiból) egy T erősítésű ideális aluláteresztő szűrővel, amelynek határ-körfrekvenciája $\omega_N = \frac{\pi}{T} \gg$ Nyquist-frekvencia



4. Ábrázolja a matematikai mintavevő szerv és a nulladrendű tartószerv együttes hatását rajzon az időtartományban. Adja meg a nulladrendű tartószerv $w_{H_0}(t)$ súlyfüggvényét és $W_{H_0}(s)$ átviteli függvényét. Adja meg az abból következő tömör alakot a $|W_{H_0}(j\omega)|$ és a $\varphi_{H_0}(\omega)$ függvényekre.



Súlyfüggvény: $w_{H_0}(t) = 1(t) - 1(t - T)$

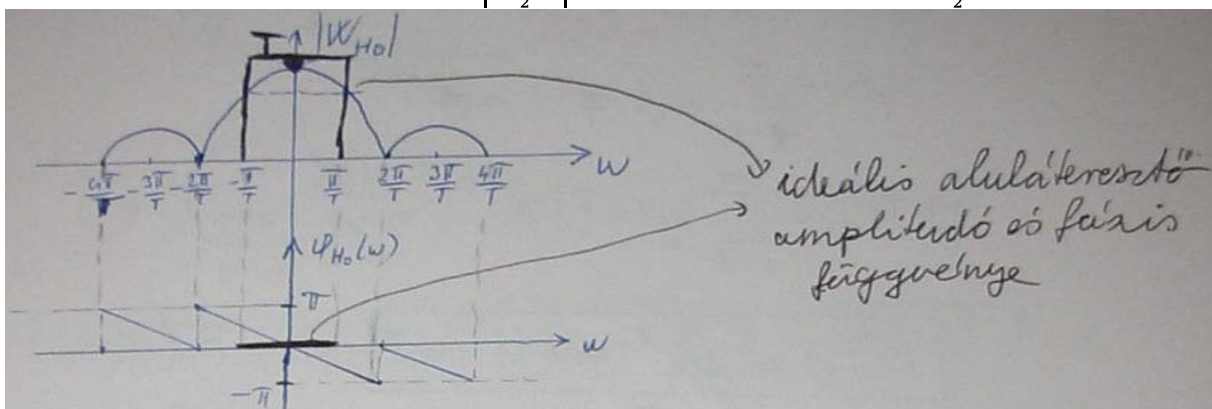
Átv. függvény: $W_{H_0}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$

$$|W_{H_0}(j\omega)| = T \left| \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right| \quad \varphi_{H_0}(j\omega) = -\frac{\omega T}{2} + \arg \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \text{ radián}$$

5. Adja meg a nulladrendű tartószerv $W_{H_0}(s)$ átviteli függvényét és az abból következő tömör alakot a $|W_{H_0}(j\omega)|$ és a $\varphi_{H_0}(\omega)$ függvényekre. Ábrázolja a függvényeket ω -ban lineáris léptékben, és tüntesse fel a rajzon az ideális aluláteresztő függvény amplitúdó és fázis függvényeit is. Miért használunk tartószervet az ideális aluláteresztő szűrő helyett?

nulladrendű tartószerv

$$W_{H_0}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad |W_{H_0}(j\omega)| = T \left| \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right| \quad \varphi_{H_0}(j\omega) = -\frac{\omega T}{2} + \arg \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$$

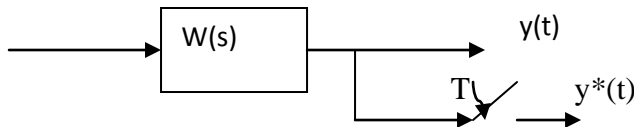


Az ideális aluláteresztő szűrő nem kauzális, azaz a viselkedésekor jövőbeli időértékeket is figyelembe kellene vennie. ergo nem megvalósítható

6. Legyen a megtervezett analóg szabályozóval a vágási frekvencia ω_c . Az analóg szabályozót mintavételes szabályozóval közelítjük, ahol a mintavételi idő T . Tekintettel arra, hogy a szabályozó kimenetén a DAC átalakító nulladrendű tartószerv funkcióval is rendelkezik, vezessen le a nulladrendű tartószerv $\varphi_{H_0}(\omega)$ fázisfüggvényéből feltételt az $T\omega_c$ szorzatra, ha azt akarjuk, hogy a tartószerv ne rontson többet a fázistöbbleten, mint 5 fok.

$$\omega_c T \leq \frac{2\pi}{180^\circ} 5^\circ$$

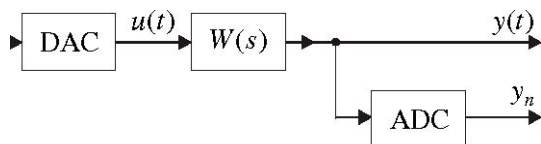
7. A matematikailag mintavételezett $u^*(t)$ jelet keresztülküldjük a $w(t)$ súlyfüggvényű és $W(s)$ átviteli függvényű analóg tagon, amelynek hatására a kimenetén $y(t)$ analóg kimenő jel keletkezik, melyet matematikailag mintavételezve $y^*(t)$ keletkezik. Rajzolja fel az ennek megfelelő blokkvázlatot. Adja meg az $Y^*(s)$, $W^*(s)$, $U^*(s)$ közötti kapcsolatot olyan alakban, amelyből következik $Z\{y(nT)\} = Z\{w(nT)\} \cdot Z\{u(nT)\}$. Milyen összefüggés áll ekkor fenn z és s között?



$$Y^*(s) = W^*(s) U^*(s) \gg Z\{y(nT)\} = Z\{w(nT)\} \cdot Z\{u(nT)\} \quad z = e^{sT}$$

8. Tekintsük a folytonosidejű $W(s)$ lineáris tagot bemenetén DAC és kimenetén ADC átalakítóval az alábbi ábra szerint:

ZOH



A DAC átalakító nulladrendű tartószerv tulajdonsággal is rendelkezik. Adja meg az együttes $D(z)$ eredő diszkrétidejű átviteli függvény és az analóg tag $v(t)$ átmeneti függvénye közötti kapcsolatot. Hogyan határozható meg $D(z)$ a MATLAB Control System Toolbox (CST) szolgáltatásaival? Hova képződnek le $W(s)$ -nek az s_i pólusai? Igaz ez a zérushelyekre is?

$$D(z) = (1 - Z^{-1}) = Z\{v(nT)\}$$

MATLAB: $W(s) \xrightarrow{c2d \text{ "zoh"}} D(z) \quad D=c2d(w,0.2, \text{"zoh"}) \gg T_s$

$W(s)$ s_i pólusai a $D(z)$ -nek $z_i = e^{s_i T}$ pólusaiban képződnek le. Hasonló összefüggés a zérushelyekre nem áll fenn.

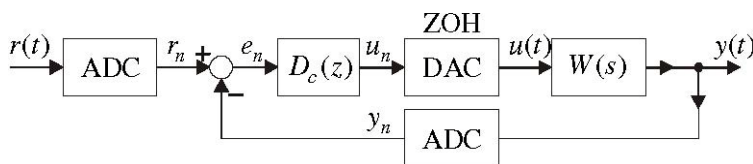
9. Vezesse le, hogyan számítható a stabil, integrátort nem tartalmazó $D(z)$ diszkrétidejű átviteli függvényű, $u_0 1(t)$ bemenő jelű és y kimenő jelű tag ekvivalens $A := y(\infty)/u_0$ statikus átviteli tényezője. Segítség: Alkalmazza a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z)$ végérték tételt.

$$A_{ekv} = \frac{y(\infty)}{u_0} \quad D(z) \frac{u_0}{1-z^{-1}} = Y(z)$$

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) u_0 D(z)$$

$$A_{ekv} = \frac{D(1)u_0}{u_0} = D(1)$$

10. Tekintsük egy egyszerű mintavételes szabályozási kör hatásvázlatát az alábbi ábra szerint:



Hogyan határozható meg a DAC, $W(s)$, ADC együttes eredő $D(z)$ diszkrétidejű átviteli függvénye? Adja meg a zárt rendszer eredő $D_{yr}(z)$ és $D_{ur}(z)$ átviteli függvényeit $D(z)$ -vel és $D_c(z)$ -vel kifejezve.

$$D(z) = (1 - z^{-1}) Z\{v(nT)\}$$

$$D_{yr}(z) = \frac{D_c(z)D(z)}{1 + D_c(z)D(z)} \quad D_{ur}(z) = \frac{D_c(z)}{1 + D_c(z)D(z)}$$

11. Adja meg az s differenciáló operátor közelítését z -ben hátrtartó differenciával (BWD) és előretartó differenciával (FWD). Adja meg az $1/s$ integráló operátor közelítését z -ben bal oldali téglalap szabállyal (LSR) és jobb oldali téglalap szabállyal (RSR), valamint az ebből s -re következő alakot. Van-e hasonlóság a differenciáló és az integráló operátorok közelítései között?

s differenciáló operátor közelítése

$$\text{BWD: } s = \frac{z-1}{Tz}$$

$$\text{FWD: } s = \frac{z-1}{T}$$

$1/s$ integráló operátor közelítése

$$\text{LSR: } s^{-1} = \frac{T}{z-1} \gg s = \frac{z-1}{T}$$

$$\text{RSR: } s^{-1} = \frac{Tz}{z-1}$$

$$\gg s = \frac{z-1}{Tz}$$

Hasonlóság: BWD=RSR FWD=LSR

12. Vezesse le a trapézszabályt (TR) az $1/s$ integráló operátor közelítésére z ben, vagy más néven a Tustin-képletet. Adja meg az $s \rightarrow z$ és $a z \rightarrow s$ helyettesítések képleteit. Hogyan végezhető el az áttérések $W(s)$ és $D(z)$ között a MATLAB CST szolgáltatásaival?

Tustin-képlet (trapéz-szabály)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{T}{2}(x_n + x_{n+1}) \gg \gg zY = Y + \frac{T}{2}(X + zX)$$

$$Y = \frac{1}{s}X = \frac{T}{2}X \frac{z+1}{z-1}$$

$$\gg \gg s^{-1} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \gg \gg s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$$Z = -\frac{sT+2}{sT-2}$$

$$W(s) \xrightarrow{c2d, 'tustin'} D(z) \quad D=c2d(W, T_s, 'tustin')$$

$$D(z) \xrightarrow{d2c, 'tustin'} W(s) \quad W=d2c(D, 'tustin')$$

13. Egységugrás ekvivalencia esetén azt akarjuk, hogy a $W(s)$ analóg tag és annak $D(z)$ közelítése az $u(t) = 1(t)$ bemenő jelre egyformán válaszoljon (a mintavételi időpontokban). Vezesse le az egységugrás ekvivalens

$W(s) \rightarrow D(z)$ áttérésre szolgáló képletet. Hogyan valósítható meg az áttérés a MATLAB CST szolgáltatásaival?

$$Z\{v(nT)\} = D(z) \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$D(z) = (1-z^{-1})Z\{v(nT)\} = (1-z^{-1})Z \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\} \right\}$$

$W(s) \xrightarrow{c2d, 'zoh'} D(z)$ nulladrendű tartószerv megvalósítása egyenértékű az egységugrás ekvivalenciával.

14. Vezessen le képletet az ideális PID szabályozó mintavételes közelítésére az integráló tagot jobb oldali téglalap szabállyal (RSR), a differenciáló tagot pedig hátratartó differenciával (BWD) közelítve. Adja meg

$$D_{PID}(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

fenti elvű közelítésében a $q_0 q_1 q_2$ együtthatókkifejezését az analóg szabályozó $A_P T_I T_D$ paramétereivel és a T mintavételi idővel.

ideális PID szabályozó mintavételes közelítése (integráló tag RSR, differenciáló tag BWD)

$$W_{PID}(s) = A_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right)$$

$$D_{PID}(z) = A_P \left(1 + \frac{Tz}{z-1} \frac{1}{T_I} + \frac{z-1}{Tz} T_D \right) = A_P \frac{A_P}{T_I} \frac{T}{1-z^{-1}} + \frac{A_P T_D}{T} (1-z^{-1})$$

$$D_{PID}(z) = \frac{A_P(1-z^{-1}) + A_P \frac{T}{T_I} + A_P \frac{T_D}{T} (1-2z^{-1} + 2z^{-2})}{(1-z^{-1})}$$

$$q_0 = \left(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T} \right) \quad q_1 = A_P \left(1 + \frac{2T_D}{T} \right) \quad q_2 = A_P \frac{T_D}{T}$$

15. Vezessen le képletet a (D-hatásban) közelítő PID szabályozó mintavételes közelítésére az egységugrás ekvivalencia elve alapján. Adja meg

$$D_{PID}(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}$$

fenti elvű közelítésében a $q_0 q_1 q_2$ és $p_0 p_1 p_2$ együtthatókkifejezését az analóg szabályozó $A_P T_I T_C$ paramétereivel és a T mintavételi idővel.

közelítő PID szabályozó mintavételes közelítése az egységugrás ekvivalencia alapján.

$$W_{PID}(s) = A_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1+sT_C} \right)$$

$$D_{PID}(z) = (1 - z^{-1}) Z\{v_{PID}, n\}$$

$$v_{PID}(t) = A_P + \frac{A_P}{T_I} t + A_P \frac{T_D}{T_C} e^{-t/T_C}$$

$$\gg Z\{v_{PID}, n\} = A_P \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{A_P}{T_I} \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{A_P T_D}{T_C} \frac{1}{1-z^{-1} e^{-T/T_C}}$$

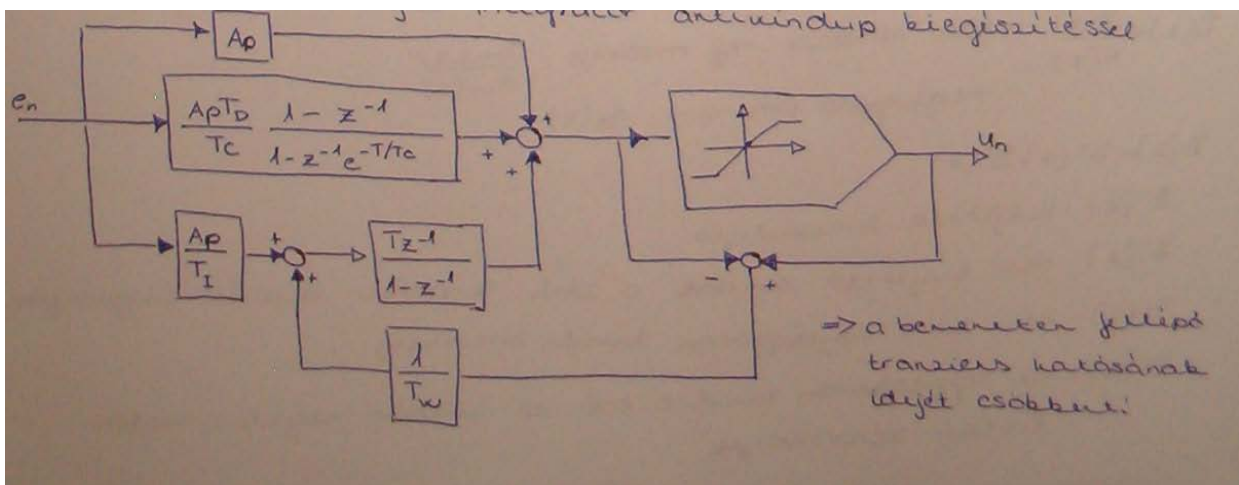
$$D_{PID}(z) = A_P + \frac{A_P}{T_I} \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{A_P T_D}{T_C} \frac{1}{1-z^{-1} e^{-T/T_C}}$$

$$p_0 = 1 \quad p_1 = -(1 + e^{-T/T_C}) \quad p_2 = e^{-T/T_C}$$

$$q_0 = A_P \left(1 + \frac{T_D}{T_C} \right) \quad q_1 = -A_P \left(1 + e^{-T/T_C} - \frac{T}{T_I} + \frac{2T_D}{T} \right) \quad q_2 = A_P \left(e^{-T/T_C} \left(1 - \frac{T}{T_I} \right) + \frac{T_D}{T_C} \right)$$

16. Adja meg a blokkvázlatát a (D-hatásban) közelítő PID szabályozó mintavételes közelítésének integrátor antiwindup kiegészítéssel. Magyarázza el az kiegészítés célját. Vezesse le az egyes blokkokban álló tagok z -átviteli függvényét. Segítség: Használja $V_{PID}(s)$ három blokkját, az egységugrás ekvivalencia elvét, valamint a következő összefüggéseket:

közelítő PID szabályozó integrátor antiwindup kiegészítéssel:



17. A zárt rendszer s -ben specifikált domináns konjugált komplex póluspárjának csillapítása és csillapítatlan sajátfrekvenciája legyen rendre ξ és ω_0 . Fejezze ki ezekkel az $s_{1,2}$ domináns konjugált komplex póluspárt valós rész és képzetes rész alakban. A zárt rendszer további és a megfigyelő polinom specifikált pólusai (sajátértékei) legyenek rendre $s_{c\infty}$ $s_{0\infty}$. Adja meg a specifikációk átszámítási szabályát $z_{1,2}$ $z_{c\infty}$ $z_{0\infty}$ -be.

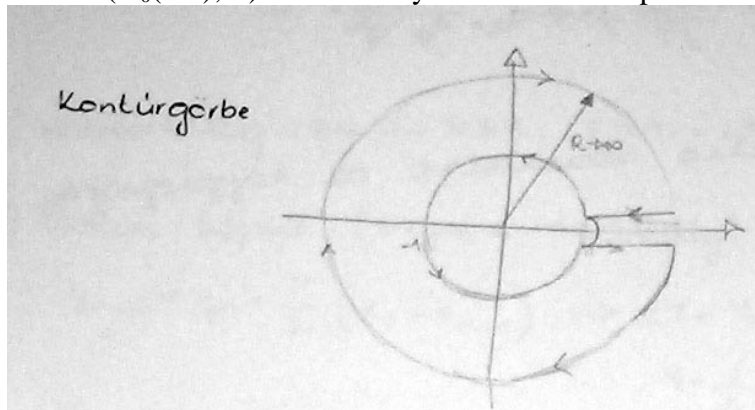
$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma_e + j\omega_e$$

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2}T} = e^{-\sigma_e T} (\cos \omega_e T \pm j \sin \omega_e T)$$

$$z_{c\infty} = e^{s_{c\infty}T} \quad z_{0\infty} = e^{s_{0\infty}T}$$

18. Adja meg a Nyquist-féle stabilitáskritérium általános alakját diszkrét időben. Rajzolja fel a kontúrgörbét a bizonyításhoz az argumentum-elv alapján. Indokolja ez alapján, mit kell helyettesíteni z -be és milyen ω tartományban a stabilitáskritérium alkalmazásakor.

EKVSZ($D_0(e^{j\omega T}); -1$) = P P felnyitott kör instabil pólusainak száma



a kontúrgörbén haladva $z = e^{j\omega T}$
 $0 \leq \omega \leq \omega_N$

19. Adja meg a Bode-féle stabilitáskritérium általános alakját, ha a felnyitott körnek nincsenek labilis pólusai. Mi a vágási frekvencia és a fázistöbblet definíciója? Mit helyettesít z -be és milyen ω tartományban a MATLAB CST dbodefüggvénye?

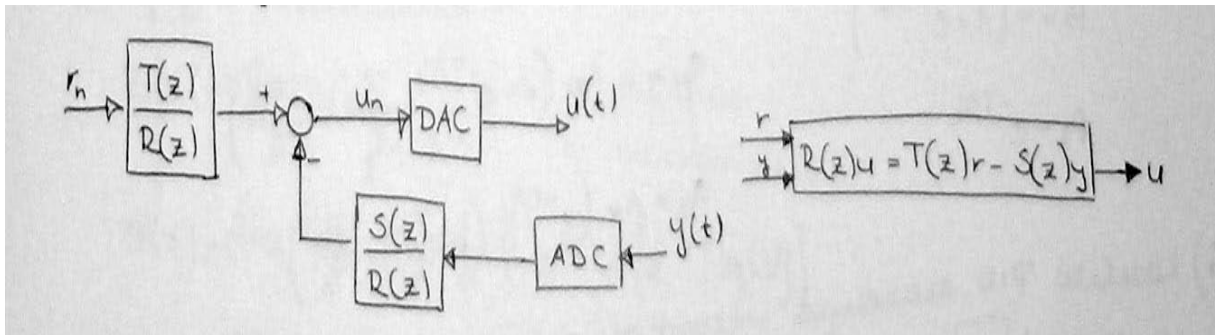
$$\varphi_t > 0$$

ω_c vágási frekvencia, felnyitott kör erősítése 0 dB-re csökken

φ_t fázistöbblet, ω_c -n a felnyitott kör fázisa hozzáadva a π -hez radiánban vagy 180° -hoz

$$\varphi_t = \pi + \arg D_0(z = e^{j\omega_c T}) > 0 \quad z = e^{j\omega_c T} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

20. Adja meg a kétszabadságfokú (2-DOF) szabályozó elvi felépítését és célszerű megvalósítását. Jelölje $D(z) = B(z)/A(z)$ a szakasz diszkrétidejű átviteli függvényét. Legyen a zárt rendszer referenciamodellje $B_m(z)/A_m(z)$, és legyen a megfigyelő (observer) polinom $A_o(z)$. Mi a szakasz $B(z)$ polinomjának szabályozástechnikai szempontból helyes $B^+(z)B^-(z)$ faktorizációja, ha a zárt rendszerben (z) kiejtésére törekszünk? Legyen a szabályozóban az integrátorok száma l , a szabályozó az előrevezető ágban $T(z)/R(z)$, a visszacsatoló ágban pedig $S(z)/R(z)$. Adja meg ekkor $R(z)$, $B_m(z)$, $T(z)$ alakját, továbbá a szabályozóban még megválasztható részek meghatározására szolgáló diophantoszi polinomegyenletet.



$D(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ zárt rendszer ref. modellje $\frac{B_m(z)}{A_m(z)}$
 megfigyelő polinom $A_o(z)$

$$B(z) = B^+(z)B^-(z)$$

$B^+(z)$ kiejthető zérushelyek ; nem lehet egységkörön kívüli zérushely

$B^-(z)$ nem kiejthető zérusok a zárt rendszer átviteli függvényében ; az egységkörön kívülre eső és tisztán negatív valós értékű zérushelyek