Kétváltozós függvények

Tartalomjegyzék

Többváltozós függvények

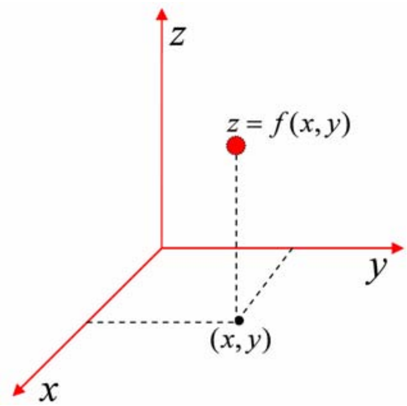
Legyen ***D*** egy n dimenziós ponthalmaz, és *f* egyértelmű hozzárendelés, mely minden $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in$ ***D*** n dimenziós ponthoz egy valós *u* számot rendel.
Jelölése: $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, a függvény az értelmezési tartománya ***D.***

Ha ***D*** kétdimenziós, akkor f kétváltozós, a szokásos jelölés $z = f(x, y)$,
ha ***D*** három dimenziós akkor f három változós, a szokásos jelölés $u = f(x, y, z)$
Ezekkel a speciális esetekkel foglalkozunk.

Kétváltozós függvények

Geometriai interpretáció

A $z = f(x, y)$ függvény geometriai interpretációját, hasonlóan az egyváltozós függvények grafikonjához, a háromdimenziós Descartes koordinátarendszerben úgy kapjuk, hogy az $\{x, y\}$ síkban az (x,y) koordinátájú pontokhoz az f által hozzárendelt z értéket mérjük fel merőlegesen. Az $(x, y, f(x, y))$ pontok által meghatározott alakzat a függvény geometriai megfelelője. Ha $f(x, y)$ folytonos (lásd később) akkor ezt <u>felületnek</u> mondjuk.



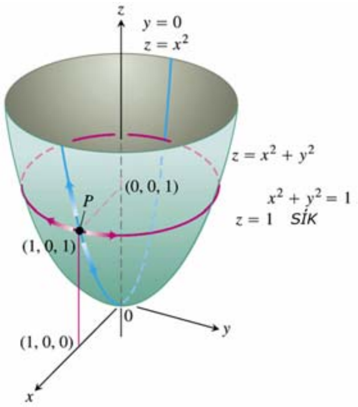
Szintvonalak

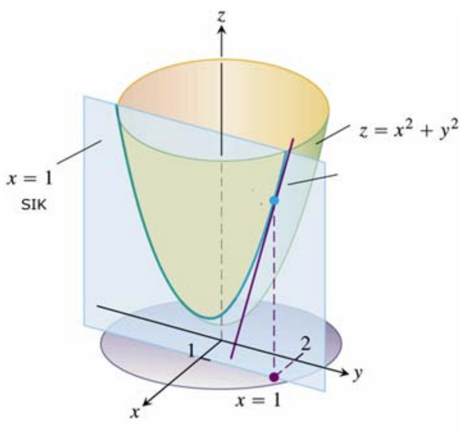
Sokszor a felületet nehéz elképzelni. Ebben segítenek a koordináta síkokkal való metszetgörbék és a szintvonalak.
Definíció: A $z = C$ egyenletű, $\{x, y\}$ síkkal párhuzamos síknak és a felületnek a metszésvonalát szintvonalak nevezzük. Segítenek a függvényt elképzelni. Ha a szintvonalakat az $\{x, y\}$ síkra vetítjük, akkor két dimenzióban is ábrázolhatjuk a felületet mint a domborzati térképen szokás.

Nevezetes felületek

Forgásparaboloid, az $\{y,z\}$ és a $\{x,z\}$ koordinátasíkkal való metszetei parabolák, szintvonalai koncentrikus körök

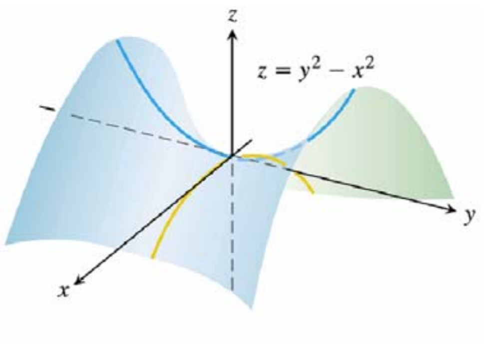
Egyenlete: $f(x,y)=x^2+y^2$





Hiperbolikus paraboloid

Egyenlete: $f(x,y)=y^2-x^2$



Ha az $x=0$ egyenletű $\{y,z\}$ koordinátasíkkal metszük el a felületet, akkor a metszetgörbe egyenlete $z=y^2$,

ha az $y=0$ egyenletű $\{x,z\}$ koordinátasíkkal metszük el a felületet, akkor a metszetgörbe egyenlete $z=x^2$,

Ha az Ha $z=1$ egyenletű $\{x,y\}$ síkkal párhuzamos síkkel metszük el a felületet, akkor a metszetgörbe egyenlete $z=y^2-x^2$ egyenletű hiperbola

Forgásfelületek

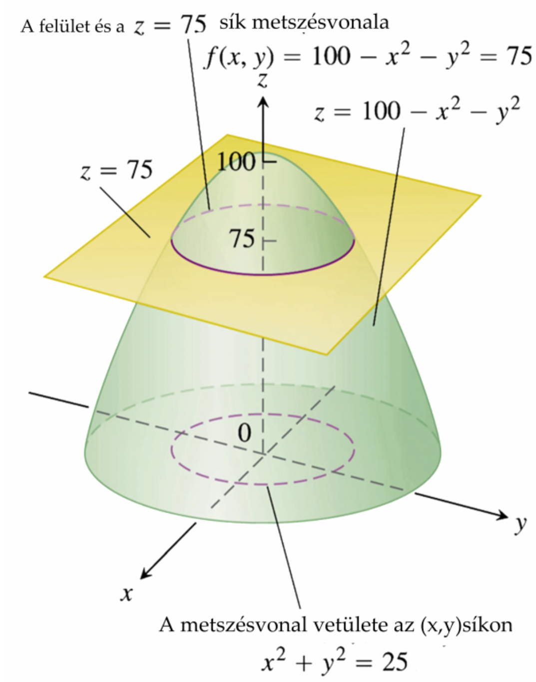
Ha az síkbeli $z=f(u)$ egyenletű görbét a z-tengely körül megforgatjuk, a kapott forgásfelület egyenlete $z=f\left(\sqrt{x^2+x^2}\right)$

Nevezetes forgásfelületek

Félgömb Egyenlete: $z=\sqrt{R^2-\left(y^2+x^2\right)}$	**Forgási hiperboloid** (egy köpenyű) Egyenlete: $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$
Forgási hiperboloid (két köpenyű) Egyenlete: $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$	**Kúp** Egyenlete: $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Példa

Ábrázoljuk a $z = 100 - x^2 - y^2$ felületet és határozzuk meg a $z = 75$ síkkal való metszésvonalát. (szintvonal)

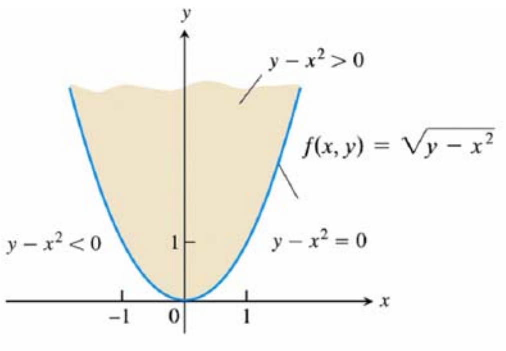


Példa

Határozzuk meg az $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ értelmezési tartományát

Megoldás:

Az $f(x, y)$ értelmezési tartománya az a tartomány, ahol $y - x^2 > 0$



Kétváltozós függvény határértéke

Az egyváltozós függvények határértékére vonatkozó lehetséges definíciók közül a következőt általánosítjuk:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, akkor és csak akkor, ha minden $x_n \to x_0$ pontsorozatra $f(x_n) \to A$

Általánosítva:

$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A$, akkor és csak akkor, ha minden $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ pontsorozatra $f(x_n, y_n) \to A$

A definíció közvetlen következményei

Függvények konstans-szorosának, összegének, szorzatának, hányadosának (ha a nevező nem nulla), racionális kitevős hatványának a határértéke a határértékek konstans-szorosa, összege, szorzata, hányadosa, racionális kitevős hatványa.

Példa

Létezik-e a következő függvény határértéke a (-2,3) pontban és ha igen mennyi?

Megoldás

$f(x,y)=\dfrac{2x+3y}{4x+15y}$,ahol a nevező nem nulla, ott a létezik határértéke és

$$\lim_{(x,y)\to(-2,3)}\frac{2x+3y}{4x+5y}=\frac{2(-2)+3\cdot 3}{4(-2)+5\cdot 3}=\frac{5}{7}$$

1. Példa
Létezik-e ugyanennek a függvénynek a határértéke a (0,0) pontban, és ha igen mennyi?

Megoldás

Az $\dfrac{2x+3y}{4x+15y}$ függvénynek nincs határértéke (0,0) pontban, mert létezik két különböző pontsorozat (röviden út), mely mentén közelítve az origóba különböző határértéket kapunk.
Pl. az x - tengelyen közelítve az origóba, azaz $(x_n,0)\to(0,0)$ esetén $\dfrac{2x_n+3\cdot 0}{4x_n+15\cdot 0}=\dfrac{1}{2}$

az y - tengelyen közelítve az origóba, azaz $(0,y_n)\to(0,0)$ esetén $\dfrac{2\cdot 0+3\cdot y_n}{4\cdot 0+15\cdot y_n}=\dfrac{1}{5}$

2. Példa

Létezik-e határértéke az origóban az $f(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}$ függvénynek

Megoldás

Nem létezik, mert az x tengely mentén 0 a határértéke, hiszen

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}=\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{x\cdot 0}{x^2+0}=0,$$

de az $y=x$ egyenes mentén $\displaystyle\lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}=\lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$

3. Példa

Létezik-e határértéke az origóban az $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ függvénynek

Láthatjuk, hogy mind a tengelyek mentén, mind az $y=x$ egyenes mentén 0 a határértéke, azt sejtjük, hogy van határértéke. Ezt a következőképpen láthatjuk be:

Egy tetszőleges $(0,0)$ hoz tartó (x_n, y_n) pontsorozatot felírható polár-koordináták segítségével: $x_n = r_n \cos\varphi_n$, és $y_n = r_n \sin\varphi_n$

melynek a $(0,0)$-hoz tartásához elegendő az $r_n \to 0$ feltétel a φ_n sorozattól függetlenül. Azaz

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{r_n\to 0} \frac{(r_n\cos\varphi_n)^2 r_n \sin\varphi_n}{(r_n\cos\varphi_n)^2 + (r_n\sin\varphi_n)^2} = \lim_{r_n\to 0} \frac{r_n^3 \cos^2\varphi_n \sin\varphi_n}{r_n^2} = \lim_{r_n\to 0} r_n \cos^2\varphi_n \sin\varphi_n = 0$$

Jó tanács: ha ugyanezt a módszert megpróbáljuk alkalmazni az előző példánál, akkor

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r_n\to 0} \frac{(r_n\cos\varphi_n) r_n \sin\varphi_n}{(r_n\cos\varphi_n)^2 + (r_n\sin\varphi_n)^2} = \lim_{r_n\to 0} \frac{r_n^2 \cos\varphi_n \sin\varphi_n}{r_n^2} = \lim_{r_n\to 0} \cos\varphi_n \sin\varphi_n \neq 0$$

mert a határérték $\cos\varphi_n \sin\varphi_n = \frac{1}{2}\sin 2\varphi_n$ függ a φ_n sorozattól. Ha $\varphi_n \to 0$ akkor a limes 0, ha $\varphi_n \to \frac{\pi}{4}$, akkor pedig $\frac{1}{2}$, stb…

Folytonos kétváltozós függvények

Ha a $z = f(x,y)$ függvénynek létezik helyettesítési értéke és határértéke egy (x_0, y_0) pontban és a kettő egyenlő, akkor ott a függvény folytonos (x_0, y_0) pontban.

azaz ha $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Példa

Folytonos-e a következő függvény: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ha \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ha \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Megoldás: Nem folytonos, hiszen nincs határértéke az origóban (lásd:5. oldal 2. példa)

Példa

Folytonos-e a következő függvény: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & ha \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ha \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Megoldás: Igen, folytonos, mert a függvénynek van határértéke (lásd:5. oldal 3. példa) és az megegyezik a helyettesítési értékével.

A parciális deriváltak

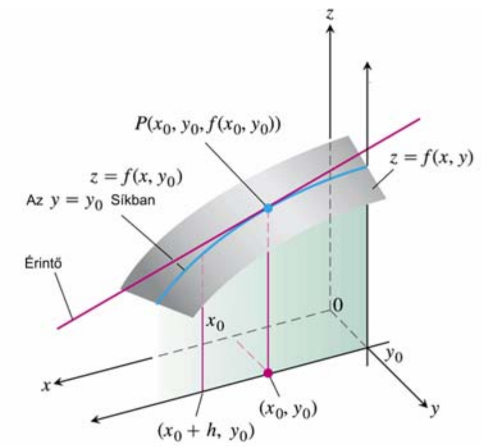
Az x szerinti parciális derivált definíciója: $f_x'(x,y)\Big/_{(x_0,y_0)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$,

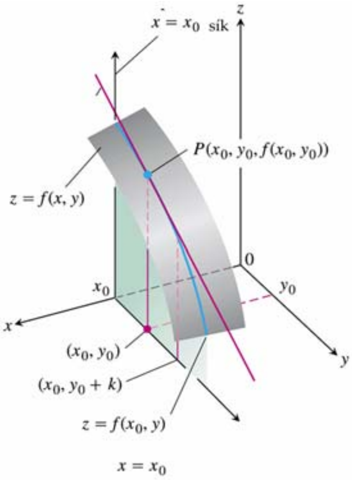
Az y szerinti parciális derivált definíciója: $f_y'(x,y)\Big/_{(x_0,y_0)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$

Vagyis a kétváltozós függvény egyik változóját konstansnak tekintve a másik változója szerint deriváljuk.

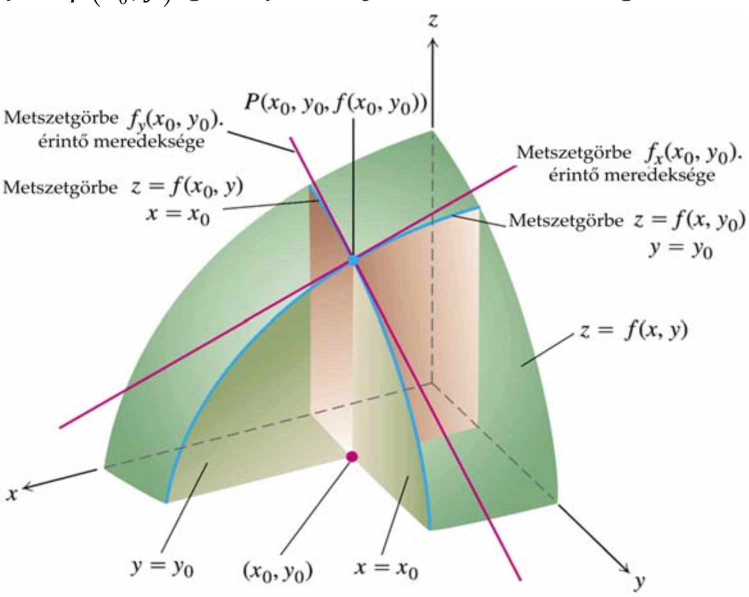
A parciális deriváltak geometriai jelentése

Az $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0) pontbeli x változó szerinti parciális deriváltjának a geometriai jelentése a $z=f(x,y)$ felület és az $y=y_0$ egyenletű sík metszésvonala ($z=f(x,y_0)$ görbe) érintőjének a meredeksége.





Az $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0) pontbeli y változó szerinti parciális deriváltjának a geometriai jelentése a $z=f(x,y)$ felület és az $x=x_0$ egyenletű sík metszésvonala ($z=f(x_0,y)$ görbe) érintőjének a meredeksége.



Parciális derivált függvény

Ha tetszőleges (x, y) pontban képezzük a $z = f(x, y)$ x változó szerinti parciális deriváltját, akkor az x változó szerinti parciális derivált függvényt kapjuk (ahol létezik)

$f_x'(x, y) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$, szokásos jelölés még $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, z_x', vagy $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

Ha tetszőleges (x, y) pontban képezzük a $z = f(x, y)$ y változó szerinti parciális deriváltját, akkor az y változó szerinti a parciális derivált függvényt kapjuk (ahol létezik)

$f_y'(x, y) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$, szokásos jelölés még $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, z_y' vagy $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Példa

Határozzuk meg a $z = x^2 \cdot \sin y$ függvény x és y szerinti parciális derivált függvényeit!

Megoldás

$z_x' = 2x \cdot \sin y$, $z_y' = x^2 \cdot \cos y$

Példa

Határozzuk meg a $z = \sin xy$ függvény x és y szerinti parciális derivált függvényeit!

Megoldás

$z_x' = y \cdot \cos xy$, $z_y' = x \cdot \cos xy$

Példa

Határozzuk meg a $z = x^y$ függvény x és y szerinti parciális derivált függvényeit!

Megoldás

$z_x' = y \cdot x^{y-1}$, mert x szerint hatványfüggvény,

$z_y' = x^y \cdot \ln x$, mert y szerint exponenciális függvény

Példa

Határozzuk meg a $z = x^2 \cos xy$ függvény x és y szerinti parciális derivált függvényeit!

Megoldás

$z_x' = 2x \cdot \cos xy + x^2(-\sin(xy)) \cdot y$, mert x szerint szorzatfüggvény,

$z_y' = x^2 \cdot (-\sin(xy)) \cdot x$, mert y szerint nem szorzat függvény, hiszen x konstans.

Kétváltozós függvény deriváltja (gradiens vektor)

Definíció:

A függvény $z = f(x,y)$ **gradiense** egy adott pontban a parciális deriváltakból, mint koordinátákból alkotott vektor: $\underline{gradf} = \left(f_x'(x_0, y_0), f_y'(x_0, y_0) \right)$

Definíció:

Az $f(x,y)$ kétváltozós függvény **differenciálható** az (x_0, y_0) pontban (totálisan), ha létezik a **gradiens** vektora.

Azaz

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) \approx \underline{gradf} \cdot \left((x - x_0), (y - y_0) \right),$$

a közelítőleg egyenlő itt azt jelenti, hogy a két oldal eltérése a megváltozás hosszával osztva nullához tart.

Tétel

Ha egy kétváltozós függvény differenciálható egy pontban, akkor ott folytonos.

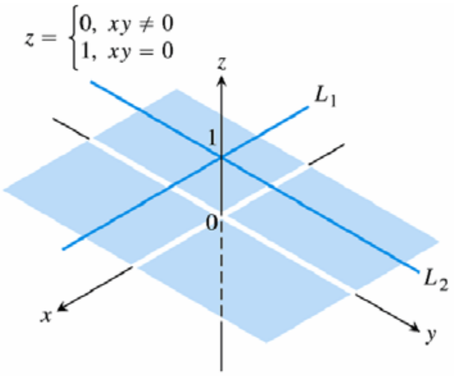
Bizonyítás

$f(x,y) - f(x_0, y_0) \approx \underline{gradf} \cdot \left((x - x_0), (y - y_0) \right)$ miatt a baloldal nullához tart, ami a folytonosság definíciója.

Megjegyzés

Abból, hogy egy függvénynek léteznek a parciális deriváltjai, nem következik, hogy differenciálható.

Például, a következő függvénynek az origóban létezik mind x mind y szerint a parciális deriváltja és mindkettő 0, de nem differenciálható, hiszen még csak határértéke sincs az origóban.



Ez a függvény lényegében $z = 0$, vagyis az $\{x, y\}$ sík csak az x-tengely és az y-tengely mentén nem 0, hanem 1 a függvény értéke.

A gradiens vektor létezésének elégséges feltétele

Tétel:

A gradiens vektor létezésének elégséges feltétele, ha az adott pontban a parciális derivált függvények folytonosak.

A differenciálhatóság geometriai jelentése

Az $f(x,y)$ kétváltozós függvény **differenciálható** az (x_0, y_0) pontban (totálisan), ha létezik **érintő síkja,** melynek egyenlete

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Tehát:

Az $f(x,y)$ függvény $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontbeli érintősíkjának a normál vektora

$\underline{n} = \left(f_x'(x_0, y_0), f_y'(x_0, y_0), -1 \right)$

Bizonyítás vázlat

Ha a függvény differenciálható, akkor a függvény megváltozása közel lineáris, azaz

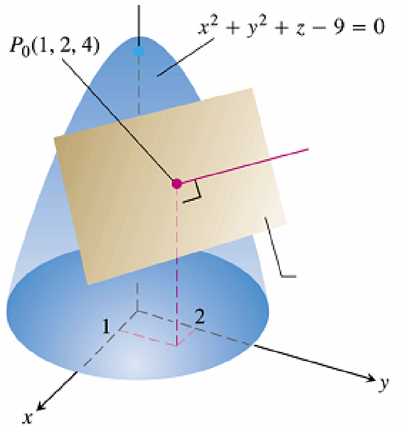
$f(x,y) - f(x_0, y_0) \approx \underline{grad f} \cdot ((x - x_0), (y - y_0))$, másképpen írva

$z - z_0 \approx f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, az érintősík egyenlete tehát:

$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

Példa

Adjuk meg az $f(x,y) = 9 - (x^2 + y^2)$ függvény $(1,2)$ pontjában az érintősík egyenletét!



Az érintősíkhoz normálvektora: $\left(f_x'(x_0, y_0), f_y'(x_0, y_0), -1 \right) = (-2x, -2y, -1)\big|_{(1,2)} = (-2, -4, -1)$,

egy pontja $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (1,2,4)$, tehát az érintősík egyenlete:

$-2(x-1) - 4(y-2) - (z-4) = 0$, azaz $2x + 4y + z - 14 = 0$

Kétváltozós függvény iránymenti deriváltja

Definíció: Az $f\left(x,y\right)$függvény $\underline{e}$ irányba vett iránymenti deriváltjának nevezzük a következő határértéket: $f'_{\underline{e}}\left(x_0,y_0\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+e_1h,y_0+e_2h)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$

Azaz az $\left(x_0,y_0\right)$ pontból egy előre rögzített egységvektor $\underline{e}=\left(e_1,e_2\right)$ ($\left|\underline{e}\right|=1$) irányába nézzük a függvényérték megváltozását és így képezzük a $\dfrac{f(x_0+e_1h,y_0+e_2h)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$ különbségi hányadost, majd ennek vesszük a határértékét midőn a megváltozás nullához tart.

Szokásos jelölés még: $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{e}}$

Tétel

Ha létezik a függvény gradiense, akkor az iránymenti derivált a gardiens vektor és a megadott irányba mutató egységvektor skaláris szorzata: $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{e}}=\underline{gradf}\cdot\underline{e}$

Példa

Határozzuk meg az $f\left(x,y\right)=x^2y$ függvény $\underline{v}=(-3,4)$ irányába eső iránymenti deriváltját a $P\left(2,1\right)$ pontban!

Megoldás

Az iránymenti deriválthoz szükséges a gradiens vektor az adott pontban és egy egység hosszú vektor mely a keresett irányba mutat.

$$\underline{gradf}=\left(2xy,x^2\right),\quad \underline{gradf}\Big|_{(2,1)}=\left(4,4\right)$$

Tekintve, hogy $\left|\underline{v}\right|=\sqrt{(-3)^2+4^2)}=5$, az irányába mutató egységvektor $\underline{e}=\left(\dfrac{-3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$

Tehát $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{e}}=\underline{gradf}\cdot\underline{e}$, azaz $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{e}}=\left(4,4\right)\cdot\left(\dfrac{-3}{5},\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{-12}{5}+\dfrac{16}{5}=\dfrac{4}{5}$

Példa

Határozzuk meg az $f\left(x,y\right)=\dfrac{25x^2y}{x^2+y^3}$ függvény $x+3y=5$egyenes irányába eső iránymenti deriváltját a $P\left(2,1\right)$ pontban!

Megoldás
Az iránymenti deriválthoz szükséges a gradiens (ha létezik) az adott pontban és egy egység hosszú vektor mely a keresett irányba mutat.

$$f_x' = \frac{50xy\left(x^2+y^3\right)+25x^2y\left(2x\right)}{\left(x^2+y^3\right)^2}, \quad f_y' = \frac{25x^2\left(x^2+y^3\right)+25x^2y\left(3y^2\right)}{\left(x^2+y^3\right)^2}$$

$$f_x'(2,1)=36\ ,\ f_y'(2,1)=32\ ,\ \underline{gradf}=\left(36,32\right)$$

Az egyenes egyenletének átalakításával $y=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}x$ látható,

hogy az egyenes meredeksége m= $-\frac{1}{3}$ és az egyenes irányába mutató vektor $\underline{v}=(-3,1)$,

a szükséges egységvektor $\underline{e}=\frac{\underline{v}}{\left|\underline{v}\right|}=\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$,

az iránymenti derivált tehát :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}=\underline{gradf}\cdot\underline{e}=\left(36,32\right)\cdot\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\left(\frac{-108}{\sqrt{10}}+\frac{32}{\sqrt{10}}\right)=\frac{76}{\sqrt{10}}$$

Tétel
A gradiens a függvény legnagyobb növekedésének irányába mutat.

Ez azt jelenti, hogy az iránymenti derivált a gardiens vektor irányában a legnagyobb!

Ekkor az iránymenti derivált értéke a gardiens vektor hosszával egyenlő.

Bizonyítás

$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}=\underline{gradf}\cdot\underline{e}$, $\quad \underline{gradf}\cdot\underline{e}=\left|\underline{gradf}\right|\cdot\left|\underline{e}\right|\cdot\cos\alpha$, ahol α a vektorok szöge.

A skaláris szorzat akkor a legnagyobb, ha a két vektor által bezárt szög 0, hiszen ekkor a szög koszinusza 1.

Ekkor tehát $\underline{gradf}\cdot\underline{e}=\left|\underline{gradf}\right|\cdot\left|\underline{e}\right|=\left|\underline{gradf}\right|$

Vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlősége

Tétel: (Young tétele) : Ha a $z=f\left(x,y\right)$ kétváltozós függvény elsőrendű parciális derivált függvényei az $A=\left(a,b\right)$ pont I_A környezetében léteznek és a függvény az *A* pontban totálisan differenciálhatók, akkor $f''_{xy}(a,b)=f''_{yx}(a,b)$.

Megjegyzés. A parciális deriváltak folytonossága elégséges feltétele a függvény totális differenciálhatóságának.

Tehát az is igaz, hogy ha a másodrendű parciális derivált függvények folytonosak, akkor a vegyes másodrendű deriváltak egyenlők, azaz értékük nem függ a deriválás sorrendjétől, vagyis $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$

A kétváltozós függvény lokális szélsőértéke

Definíció

A $z = f(x,y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális maximuma van, ha létezik az (x_0, y_0) pontnak olyan környezete, melyben az $z_0 = f(x_0, y_0)$ a legnagyobb érték,

A $z = f(x,y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális minimuma van, ha létezik az (x_0, y_0) pontnak olyan környezete, melyben az $z_0 = f(x_0, y_0)$ a legkisebb érték,

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele

A lokális szélsőérték (maximum vagy minimum) létezésének szükséges feltétele:

$$gradf = \left(f_x'(x_0, y_0), f_y'(x_0, y_0) \right) = (0,0)$$

Indoklás

Ha a függvénynek lokális szélsőértéke van az (x_0, y_0)-ban és a függvény differenciálható, azaz létezik ott az érintősíkja és, akkor abban a pontban az érintősík vízszintes, a normál vektora a z tengellyel párhuzamos, vagyis mivel

$\underline{n} = \left(f_x'(x_0, y_0), f_y'(x_0, y_0), -1 \right)$ adódik, hogy $gradf = \left(f_x'(x_0, y_0), f_y'(x_0, y_0) \right) = (0,0)$

(1) Minden pontban a gradiens merőleges a ponton áthaladó szintvonalra.

A szélsőérték létezésének elégséges feltétele

A lokális szélsőérték (maximum vagy minimum) létezésének elégséges feltétele:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}''(x_0, y_0) & f_{xy}''(x_0, y_0) \\ f_{yx}''(x_0, y_0) & f_{yy}''(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

Ha nem teljesül, akkor nincs szélső értéke a függvénynek, akkor nyeregpontja van.

Bizonyítás nélkül

A szélsőérték jellege

A szélsőérték jellegét (maximum vagy minimum) az $f_{xx}''(x_0, y_0)$ előjele alapján állapíthatjuk meg. (f_{xx}'' és f_{yy}'' előjele mindig megegyezik abban a pontban ahol fenti determináns D>0)

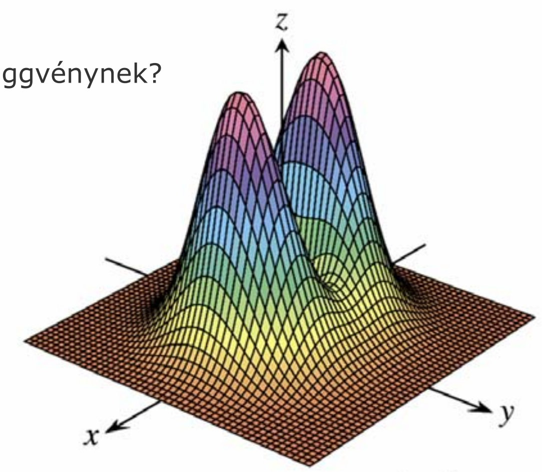
Ha $f_{xx}''(x_0, y_0) > 0$ akkor a függvénynek minimuma van, ha $f_{xx}''(x_0, y_0) < 0$ akkor maximuma van.

Megjegyzés: $f_{xx}''(x_0, y_0) \neq 0$, hiszen akkor D$\leq 0$ lenne.

Példa

Hol van lokális szélsőértéke a következő függvénynek?

$$f(x, y) = \left(4x^2 + y^2\right)e^{-x^2-y^2}$$



$z = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$

Megoldás

$$f_x' = (8x)e^{-x^2-y^2} + \left(4x^2 + y^2\right)e^{-x^2-y^2}(-2x) = e^{-x^2-y^2}\left(8x - 8x^3 - 2xy^2\right) = 2xe^{-x^2-y^2}\left(4 - 4x^2 - y^2\right)$$

$$f_y' = (2y)e^{-x^2-y^2} + \left(4x^2 + y^2\right)e^{-x^2-y^2}(-2y) = e^{-x^2-y^2}\left(2y - 8x^2y - 2y^3\right) = 2ye^{-x^2-y^2}\left(1 - 4x^2 - y^2\right)$$

$f_x' = 0$, $2xe^{-x^2-y^2}\left(4 - 4x^2 - y^2\right) = 0$

$4 - 4x^2 - y^2 = 0$, vagy $x = 0$

$f_y' = 0$, $2ye^{-x^2-y^2}\left(1 - 4x^2 - y^2\right) = 0$

$\left(1 - 4x^2 - y^2\right) = 0$, vagy $y = 0$

A megoldásokra:

1. $x = 0$ és $y = 0$
2. $4 - 4x^2 - y^2 = 0$, és $y = 0$, $\Rightarrow$ $4 = 4x^2$, $1 = x^2$
3. $1 - 4x^2 - y^2 = 0$, és $x = 0$ $\Rightarrow$ $1 = y^2$

A megoldások: $(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$

Tehát sorra kell venni ezeket a pontokat és ki kell számolni D determináns értékét.

Megnézni, hogy D=$\begin{vmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{vmatrix} > 0$ teljesül-e.

Ha nem, akkor nincs szélső értéke a függvénynek, akkor nyeregpontja van.

$$f_{xx}'' = \left(2e^{-x^2-y^2}\left(4x-4x^3-xy^2\right)\right)_x' = 2e^{-x^2-y^2}(-2x)\left(4x-4x^3-xy^2\right)+2e^{-x^2-y^2}\left(4-12x^2-y^2\right)=$$
$$=2e^{-x^2-y^2}\left(-20x^2+8x^4+2x^2y^2+4-y^2\right)$$
$$=e^{-x^2-y^2}(-2x)\left(2y-8x^2y-2y^3\right)+e^{-x^2-y^2}\left(2-8x^2-6y^2\right)=e^{-x^2-y^2}\left(-2xy+16x^3y+4xy^3+2-8x^2-6y^2\right)$$
$$f_{yy}'' = \left(e^{-x^2-y^2}\left(2y-8x^2y-2y^3\right)\right)_y' = e^{-x^2-y^2}(-2y)\left(2y-8x^2y-2y^3\right)+e^{-x^2-y^2}\left(2-8x^2-6y^2\right)=$$
$$=e^{-x^2-y^2}\left(-4y^2+16x^2y^2+4y^4+2-8x^2-6y^2\right)=e^{-x^2-y^2}\left(-10y^2+16x^2y^2+4y^4+2-8x^2\right)$$
$$f_{xy}'' = \left(e^{-x^2-y^2}\left(8x-8x^3-2xy^2\right)\right)_y' = e^{-x^2-y^2}(-2y)\left(8x-8x^3-2xy^2\right)+e^{-x^2-y^2}\left(-4xy\right)=$$
$$=e^{-x^2-y^2}\left(-20xy+16x^3y+4xy^3\right)$$
$$f_{yx}'' = \left(e^{-x^2-y^2}\left(2y-8x^2y-2y^3\right)\right)_x' = e^{-x^2-y^2}(-2x)\left(2y-8x^2y-2y^3\right)+e^{-x^2-y^2}\left(-16xy\right)=$$
$$=e^{-x^2-y^2}\left(-4xy+16x^3y+4xy^3-16xy\right)=e^{-x^2-y^2}\left(-20xy+16x^3y+4xy^3\right)$$

Az f_{yx}'' deriváltat már feleslegesen számoltuk ki, mert a Young tétele szerint megegyezik f_{yx}''-vel.

Vizsgáljuk meg a D értékét azokban a pontokban ahol a parciális deriváltak nullák.

1. $(0,0)$

$$f_{xx}''(0,0)=2e^{-x^2-y^2}\left(-20x^2+8x^4+2x^2y^2+4-y^2\right)\Big|_{x=0,\,y=0}=8$$

$$f_{yy}''(0,0)=e^{-x^2-y^2}\left(-10y^2+16x^2y^2+4y^4+2-8x^2\right)\Big|_{x=0,\,y=0}=2$$

$$f_{yx}''(0,0)=f_{xy}''(0,0)=e^{-x^2-y^2}\left(-20xy+16x^3y+4xy^3\right)\Big|_{x=0,\,y=0}=0$$

Tehát D=$\begin{vmatrix} f_{xx}''(0,0) & f_{xy}''(0,0) \\ f_{yx}''(0,0) & f_{yy}''(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 > 0$, vagyis van lokális szélsőértéke a függvénynek.

2. $(1,0)$

$$f_{xx}''(1,0)=2e^{-x^2-y^2}\left(-20x^2+8x^4+2x^2y^2+4-y^2\right)\Big|_{x=1,y=0}=2e^{-1}\left(-20+8+4\right)=-16e^{-1}$$

$$f_{yy}''(1,0)=e^{-x^2-y^2}\left(-10y^2+16x^2y^2+4y^4+2-8x^2\right)\Big|_{x=1,y=0}\ e^{-1}\left(2-8\right)=-6e^{-1}$$

$$f_{yx}''\left(1,0\right)=f_{xy}''\left(1,0\right)=e^{-x^2-y^2}\left(-20xy+16x^3y+4xy^3\right)\Big|_{x=1,y=0}=0$$

Tehát D= $\begin{vmatrix} f_{xx}''\left(1,0\right) & f_{xy}''\left(1,0\right) \\ f_{yx}''\left(1,0\right) & f_{yy}''\left(1,0\right) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -16e^{-1} & 0 \\ 0 & -6e^{-1} \end{vmatrix}>0$, vagyis van lokális szélsőértéke a függvénynek az (1,0) pontban. Tekintettel arra, hogy $f_{xx}''(1,0)<0$, ezért itt a függvénynek lokális maximuma van.

3. $(0,1)$

$$f_{xx}''(0,1)=2e^{-1}\left(4-1\right)\Big|=6e^{-1}$$

$$f_{yy}''(0,1)=e^{-1}\left(-10+4+2\right)=-4e^{-1}$$

$$f_{yx}''\left(0,1\right)=f_{xy}''\left(0,1\right)=0$$

Tehát D= $\begin{vmatrix} f_{xx}''\left(0,1\right) & f_{xy}''\left(0,1\right) \\ f_{yx}''\left(0,1\right) & f_{yy}''\left(0,1\right) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{vmatrix}<0$, vagyis nincs lokális szélsőértéke a függvénynek az (0,1) pontban.

4. $(-1,0)$

$$f_{xx}''(-1,0)=2e^{-1}\left(-20+8+4\right)=-16e^{-1}$$

$$f_{yy}''(-1,0)=-6e^{-1}$$

$$f_{yx}''\left(-1,0\right)=f_{xy}''\left(-1,0\right)=0$$

Tehát D= $\begin{vmatrix} f_{xx}''\left(-1,0\right) & f_{xy}''\left(-1,0\right) \\ f_{yx}''\left(-1,0\right) & f_{yy}''\left(-1,0\right) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -16e^{-1} & 0 \\ 0 & -6e^{-1} \end{vmatrix}>0$, vagyis van lokális szélsőértéke a függvénynek az (-1,0) pontban. Tekintettel arra, hogy $f_{xx}''(-1,0)<0$, ezért itt a függvénynek lokális maximuma van.

5. $(0,-1)$

$$f_{xx}''(0,-1)=2e^{-1}\left(4-1\right)=6e^{-1}$$

$$f_{yy}''(0,-1)=-4e^{-1}$$

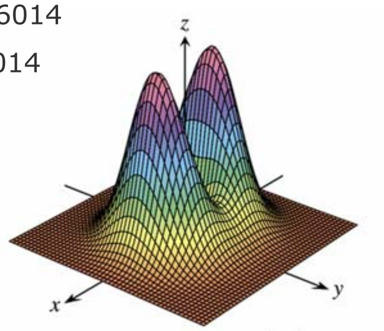
$f_{yx}''(0,-1) = f_{xy}''(0,-1) = 0$

Tehát D= $\begin{vmatrix} f_{xx}''(0,-1) & f_{xy}''(0,-1) \\ f_{yx}''(0,-1) & f_{yy}''(0,-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{vmatrix} < 0$, vagyis nincs lokális szélsőértéke a függvénynek a $(0,-1)$ pontban.

Azt kaptuk, hogy a $(-1,0)$ és az $(1,0)$ pontokban van lokális maximum, a $(0,0)$ pontban pedig lokális minimum. A maximum értéket megkapjuk, ha behelyettesítünk a függvénybe. $f(-1,0) = 4e^{-1} \approx 1{,}476014$

$f(1,0) = 4e^{-1} \approx 1{,}476014$

$f(0,0) = 0$



$z = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$

A kétváltozós függvény tartományi szélsőértéke

Definíció

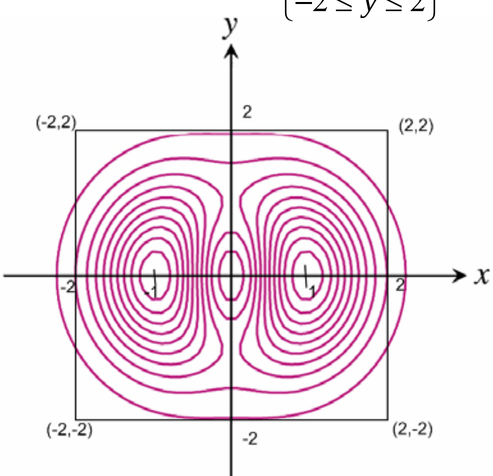
A $z = f(x,y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban tartományi maximuma van, ha $z_0 = f(x_0, y_0)$ a legnagyobb érték az egész tartományban,

A $z = f(x,y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban tartományi maximuma van, ha $z_0 = f(x_0, y_0)$ a legkisebb érték az egész tartományban.

A tartományi szélsőértéket a függvény vagy a tartomány belsejében vagy a határán veszi fel. Ha a tartomány belsejében veszi fel, akkor ott lokális szélsőértéke is van.

Példa
Határozzuk meg a következő függvény tartománybeli legnagyobb és legkisebb értékét (másképpen tartományi vagy globális szélsőértékeit) a T= $\left\{ \begin{matrix} -2 \le x \le 2 \\ -2 \le y \le 2 \end{matrix} \right\}$ négyzeten.

$f(x,y) = \left(4x^2 + y^2\right)e^{-x^2-y^2}$



Megoldás

Két eset lehetséges: 1. A szélsőértéket a tartomány belsejében veszi fel.
2. A szélsőértéket a tartomány határán veszi fel.

Ha a globális szélsőértéke a tartomány belsejében van, akkor ott lokális szélsőértéke is van a függvénynek.

Praktikus megjegyzés: Azt azonban nem kell vizsgálni, hogy ténylegesen van-e ott szélsőértéke, mert ha nincs akkor annál kisebb vagy nagyobb értéket a határon vesz fel.

1. Vagyis meg kell nézni a függvény értékét azokon a helyeken ahol $f_x' = 0$ és $f_y' = 0$.
2. Ezeket az értékeket kell összehasonlítani a határon felvett értékekkel.

Ezek közül a legnagyobb a globális maximum, a legkisebb a globális minimum.

A parciális deriváltak nullák a $(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$ pontokban.

$f(1,0) = f(-1,0) = 4e^{-1} \approx 1{,}476014$, $f(0,0)=0$, $f(0,1) = f(0,-1) = e^{-1}$,

Ezek közül a legkisebb a 0 és a legnagyobb a $4e^{-1}$. A tartomány határán is meghatározzuk a legnagyobb és a legkisebb értéket.

A tartomány határai 1. $x = 2$ egyenes. Ezen a függvény $f(2,y) = \left(16 + y^2\right)e^{-4-y^2}$ kérdés, hogy ennek hol van a maximuma és a minimuma a $[-2,2]$ zárt intervallumon. Először $(-2,2)$-n határozzuk meg az egyváltozós függvény szélsőértékét.

$$f'(2,y) = (2y)e^{-4-y^2} + \left(16 + y^2\right)e^{-4-y^2}(-2y) = 2ye^{-4-y^2}\left(-15 - y^2\right)$$

Ahol ez a derivált nulla, ott lehet szélsőértéke. $y = 0$ vagy $y = \sqrt{15}$. Ezek közül a tartományba a $(2,0)$ pont esik. Itt a függvény értéke $f(2,0) = (16)e^{-4} = \dfrac{16}{e^4} \simeq 0{,}296648$

Hasonlóan az $x = -2$ egyenes mentén a lehetséges szélsőérték

$$f(-2,0) = (16)e^{-4} = \frac{16}{e^4} \approx 0{,}296648$$

Az $y = 2$ egyenesen $f(x,2) = \left(4x^2 + 4\right)e^{-x^2-4}$,

$$f'(x,2) = (8x)e^{-x^2-4} + e^{-x^2-4}(-2x)\left(4x^2 + 4\right) = 8xe^{-x^2-4}\left(1 - x^2 - 1\right) = 8x^3e^{-x^2-4}$$

Ez csak a $(0,2)$ pontban nulla, a függvény értéke itt $f(0,2) = 4e^{-4} = \dfrac{4}{e^4} \approx 0{,}07416$

Az $y = -2$ egyenesen $f(x,-2) = 8x^3e^{-x^2-4}$, mely csak a $(0,-2)$ pontban nulla, a függvény értéke itt $f(0,-2) = 4e^{-4} = \dfrac{4}{e^4} \approx 0{,}07416$

Végül meg kell nézni a négyzet csúcspontjaiban

$$f(2,2) = f(-2,2) = f(2,-2) = f(-2,-2) = (16 + 4)e^{-8} = \frac{20}{e^8} \approx 0{,}006875$$

az így kapott függvényértékek közül kell kiválasztani a legkisebbet és a legnagyobbat.

A legnagyobb függvényérték a $(-1,0)$ és $(1,0)$ pontokban van $4e^{-1} \approx$ 1,476014, a legkisebb az origóban van 0.