

**Alkalmazott algebra 1. ZH. 2021-11-11**
**Neptun:** \_\_\_\_\_ **Név:** \_\_\_\_\_

A dolgozat feladatainak **eredményeit** mind erre az oldalra kell írni, a **mellékszámításokat** a hátoldalra, ez elvben elegendő, de ha esetleg nem, a másik lap is beadandó, melynek jobb felső sarkára írja fel a nevét, Neptun-kódját! **Eredmény mellékszámítás nélkül** nem kap pontot. A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!

1. Válaszoljon az alábbi kérdésekre (mindegyik 0 vagy 1 pont)! (4 pont)

a) Karikázzuk be az alábbi struktúrák közül azokat, amelyek testek!

$$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_8, \mathbb{N}$$

b) Legyen  $\mathbf{A}$  négyzetes mátrix. Melyek igazak (I), ill. hamisak (H) az alábbi állítások közül?

1. Minden valós diagonalizálható  $\mathbf{A}$  mátrix előáll

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^T$$

alakban, ahol az  $\mathbf{x}_i$  vektor a  $\lambda_i$ -hez tartozó sajátvektor,  $\mathbf{y}_i$  pedig a hozzá tartozó bal sajátvektor.

2. Az  $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$  sajátfelbontás  $\mathbf{C}$  mátrixa a sajátvektorokból alkotott bázisról a standard bázisra való áttérés mátrixa.

3.  $\mathbf{A}$  pontosan akkor diagonalizálható, ha van  $n$  független sajátvektora.

c) Legyen  $\mathbf{A}$  négyzetes mátrix. Melyek igazak (I), ill. hamisak (H) az alábbi állítások közül?

1.  $\mathbf{A}$  ortogonálisan hasonló a  $\mathbf{B}$  mátrixhoz, ha van olyan ortogonális  $\mathbf{Q}$  mátrix, hogy  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}$ .

2.  $\mathbf{A}$  ortogonálisan hasonló a  $\mathbf{B}$  mátrixhoz, ha van olyan ortogonális  $\mathbf{Q}$  mátrix, hogy  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T\mathbf{B}\mathbf{Q}$ .

3.  $\mathbf{A}$  pontosan akkor normális, ha unitéren diagonalizálható.

d) Mit tudunk az alábbi négyzetes mátrixok sajátértékeiről:

Ortogonalis mátrix  $\forall$  sajátértéke...

Ferdén önadjungált mátrix  $\forall$  sajátértéke...

Nilpotens mátrix  $\forall$  sajátértéke...

2. (4 pont) Mi az  $x^2$  függvénynek a legfeljebb elsőfokú polinomok terére eső merőleges vetülete (vagyis melyik lineáris függvény van legközelebb  $x^2$ -hez), ha  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$  az euklideszi térben a skaláris szorzás.

3. (4 pont) Határozzuk meg az

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y + 3z = 3 \\ 2x - y + 3z = 6 \end{cases}$$

egyenletrendszer összes megoldását a minimális abszolút értékű megoldással kifejezve!

4. (4 pont) Számítsuk ki az  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  (redukált)

QR-felbontását!

5. (4 pont) Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix Cholesky-felbontását!