ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak **VIZSGADOLGOZAT** **2010. jún. 3.**
Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (14 pont)

a)

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

Adja meg az általános megoldást!
Adja meg az $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$ feltételeket kielégítő megoldást!

b)

$$a\,y'' + by' + cy = 0\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Írja fel a karakterisztikus egyenletét!
Hogyan kapjuk meg az általános megoldást $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\,\beta$ konjugált komplex gyökök esetén? Állítását bizonyítsa be!

a.) $\boxed{7}$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$

$y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$ (4) $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y(0) = 0: \quad C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$

$y'(0) = 4: \quad y' = 3C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x}$

$3C_1 - C_2 = 4 \quad : \ 4C_1 = 4 \Rightarrow C_1 = 1$

$C_2 = -1$

$y(x) = e^{3x} - e^{-x}$ (3)

b.) $\boxed{7}$

A karakterisztikus egyenlet: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ (2)

Ha $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ esetén $Y_1 = e^{\lambda_1 x}$ és $Y_2 = e^{\lambda_2 x}$ megoldások, de nem valósak. Tudjuk, hogy ezek bármilyen lineáris kombinációja is megoldás. Ezt használjuk fel.

$Y_1 = e^{(\alpha + j\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + j e^{\alpha x}\sin\beta x$

$Y_2 = e^{(\alpha - j\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - j e^{\alpha x}\sin\beta x$

$Y_1^* = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$

$Y_2^* = \dfrac{Y_1 - Y_2}{2j} = e^{\alpha x}\sin\beta x$

ezek is megoldások és már valósak

$\Rightarrow y_H = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$ (5)

an2v100603/1.

2. feladat (10 pont)

Adja meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

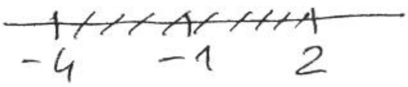
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+2}}{3^{2n}\ \sqrt{n}} \quad (x+1)^n$$

Adjon meg egy olyan intervallumot, melyben a sor egyenletesen konvergens!

$x_0 = -1 \qquad a_n = \dfrac{9\,(-3)^n}{9^n\,\sqrt{n}}$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{\sqrt[n]{9}\cdot 3}{9\,\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1\cdot 3}{9\cdot\sqrt{1}} = \dfrac{1}{3} = \alpha = \dfrac{1}{R}$

$\Rightarrow R = 3$ 4



$x = -4$:

$\sum_1^{\infty} \dfrac{9\,(-3)^n}{9^n\,\sqrt{n}}\,(-3)^n = 9\sum^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 9\sum^{\infty} \dfrac{1}{n^{1/2}}$

$\alpha = \frac{1}{2} \not> 1$: div. a sor 2

$x = 2$:

$\sum \dfrac{9\,(-3)^n}{9^n\,\sqrt{n}}\,3^n = 9\sum^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konv., mer Leibniz sor 2

K. T. : $(-4, 2]$

$\forall\ [\alpha, \beta] \subset (x_0 - R,\ x_0 + R)$-ben egyenletes a konvergenca. Így pl. $[-3, 1]$-ben egyenletes a konvergencia. 2

3. feladat (16 pont)

a) Ismertesse a binomiális sort!

b) Mennyi a sor konvergencia sugara? Állítását bizonyítsa be!

c)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16 - 64\,x^2}}$$

Adja meg az f függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

a.) $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \alpha \neq -1$ 3

$\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{1\cdot 2 \ldots n}$

an2v100603/2.

b.) Ⓣ $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \text{ esetén } R=1}$ (1)

Ⓑ $$a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$a_{k+1} = \binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!} = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}\right| \xrightarrow[\infty]{k} |-1| = 1 = \frac{1}{R} \implies R=1$$ (4)

c.) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{64x^2}{16}}} = \frac{1}{2}\left(1+(-4x^2)\right)^{-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} (-4x^2)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/4}{n}(-4)^n x^{2n}$$
(4) (1)

$$|-4x^2| = 4|x|^2 < 1 \implies |x| < \frac{1}{2} \implies R = \frac{1}{2}$$ (3)

4. feladat (18 pont)

a)

$$f(x,y) = \frac{2x^2+3y^2}{4x^2+y^2}$$

$a1)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

$a2)$ $f'_y(x,y) = ?$, ha $(x,y) \neq (0,0)$

b) Írja le az iránymenti derivált definícióját!

c) $\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$

Állítását indokolja meg! (f nem a fenti!)

a1.) $\boxed{6}$ $$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3m^2x^2}{4x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x^2}{x^2}}_{=1} \frac{2+3m^2}{4+m^2} =$$

$$= \frac{2+3m^2}{4+m^2} \text{ függ } m\text{-től} \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$$

(Vagy: $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{2x^2+3y^2}{4x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{4x^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3y^2}{4x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{3y^2}{y^2} = 3 \neq \frac{1}{2} \implies \text{a h.é.} \nexists$$)

an20100603/3.

a2) $\boxed{3}$ $(x,y) \neq (0,0)$: $\quad f_y' = \dfrac{6y(4x^2+y^2) - (2x^2+3y^2)\,2y}{(4x^2+y^2)^2}$

b.) $\boxed{3}$ $\quad \dfrac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{a}} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(\underline{a}+t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t} \qquad |\underline{e}| = 1$

c.) $\boxed{6}$ T $\quad \max \dfrac{df}{d\underline{e}}\Big|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)|$ $\quad$ 2

B Az elégséges tétel miatt:

$$\frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \underline{e} = |\operatorname{grad} f(P_0)| \underbrace{|\underline{e}|}_{=1} \cos\varphi =$$

$$= \underbrace{|\operatorname{grad} f(P_0)|}_{\text{konstans}} \cos\varphi$$

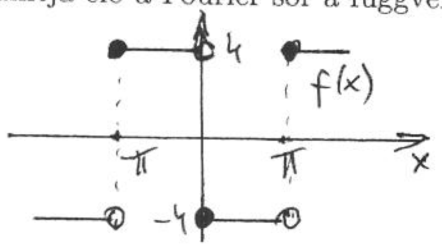
Mivel $-1 \le \cos\varphi \le 1$, akkor lesz maximális a kifejezés értéke, ha $\cos\varphi = 1$, tehát $\varphi = 0$.
És akkor

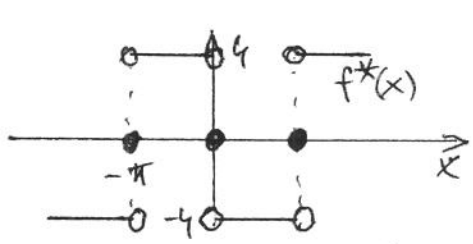
$$\max \frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)|$$

5. feladat (12 pont)*

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{ha } \ x \in [-\pi, 0) \\ -4, & \text{ha } \ x \in [0, \pi) \end{cases} \quad , \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

Írja fel az 2π szerint periodikus f függvény Fourier sorát!
Hol állítja elő a Fourier sor a függvényt?





f és f^* Fourier sora megegyezik és f^* páratlan.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f^*(x)\cos nx}_{\text{ptlan}}\,dx = 0 \qquad 2$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f^*(x)\sin nx}_{\text{ps}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} -4\sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{8}{\pi}\,\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{8}{\pi}\,\frac{1}{n}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ ps} \\ -\frac{16}{\pi}\frac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ ptlan.} \end{cases} \qquad 6$$

an2v-100603/4.

A Fourier sor:

$$\phi(x) = -\frac{16}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right) \quad (2)$$

$f(x) = \phi(x)$, ha $x \neq n\pi$ (Dirichlet tétel) (2)

$$\phi(n\pi) = \frac{f(n\pi+0)+f(n\pi-0)}{2} = 0 \neq f(n\pi)$$

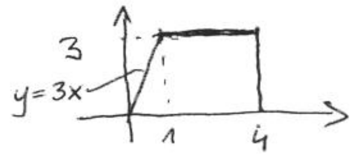
(Ha nem tér ki f^*-ra, akkor is megkaphatja a pontokat

6. feladat (10 pont)*

$$\iint_T e^{6x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

ahol T az $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,3)$ és a $D(1,3)$ pontok által meghatározott trapéz. Alakítsa kétféleképpen kétszeres integrállá a fenti kettős integrált! Az egyik segítségével számolja ki a kettős integrál értékét!

$$\iint_T f\,dT = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{3x} f\,dy\,dx + \int_{x=1}^{4}\int_{y=0}^{3} f\,dy\,dx \quad (3)$$



$$\iint_T f\,dT = \int_{y=0}^{3}\int_{x=\frac{y}{3}}^{4} f\,dx\,dy \quad (2)$$

Az utóbbi segítségével:

$$\int_{y=0}^{3}\int_{x=\frac{y}{3}}^{4} e^{-y}e^{6x}\,dx\,dy = \int_0^3 e^{-y}\frac{e^{6x}}{6}\Big|_{x=\frac{y}{3}}^{4} dy = \frac{1}{6}\int_0^3\left(e^{-y+24}-e^{y}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{e^{-y+24}}{-1}-e^{y}\right)\Big|_{y=0}^{3} = \frac{-1}{6}\left(e^{21}+e^{3}-(e^{24}+1)\right) \quad (5)$$

7. feladat (10 pont)*

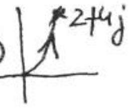
a) $I_a = \int_L e^{2z}\,\mathrm{d}z\,,$ $\quad \operatorname{Re} I_a = ?\,,\ \operatorname{Im} I_a = ?$

L: az $y = x^2$ parabola $x \in [0\,,\,2]$ darabja az origóból irányítva.

b) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{z^2+25}$: $\quad$ adja meg f izolált szinguláris pontjait!

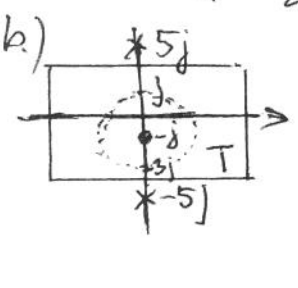
$$\oint_{|z+j|=2} f(z)\,\mathrm{d}z = ?$$

a.) $I_a = \frac{e^{2z}}{2}\Big|_{A=0}^{B=2+4j}$ (3) $= \frac{1}{2}\left(e^{4+8j}-e^{0}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{4}(\cos 8 + j\sin 8)-1\right)$



$\operatorname{Re} I_a = \frac{1}{2}(e^4\cos 8 - 1)$ (1) $\quad \operatorname{Im} I_a = \frac{1}{2}e^4\sin 8$ (1)

b.)



Szinguláris pontok: $+5j, -5j$ (2)

$I_b = 0$, mert f reg T-n (Cauchy-féle alaptétel) (3)

an2v100603/5.

8. feladat (10 pont)*

Írja fel az alábbi komplex számokat algebrai alakban , ha azok léteznek!

$$w_1 = \sin\left(2 + j\frac{\pi}{2}\right), \qquad w_2 = \ln 0, \qquad w_3 = \mathrm{Ln}(-3j), \qquad w_4 = (\sqrt{2} - j\sqrt{2})^j$$

$w_1 = \sin 2 \cos j\frac{\pi}{2} + \cos 2 \sin j\frac{\pi}{2} = \sin 2\, \mathrm{ch}\frac{\pi}{2} + j \cos 2\, \mathrm{sh}\frac{\pi}{2}$ (3)

$w_2 \nexists$ (1)

$w_3 = \mathrm{Ln}(-3j) = \ln|-3j| + j(\mathrm{arc}(-3j) + 2k\pi) = \ln 3 + j\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ (3)

$w_4 = e^{j \ln(\sqrt{2} - j\sqrt{2})} = e^{j(\ln 2 + j(-\frac{\pi}{4}))} = e^{\frac{\pi}{4} + j\ln 2} = e^{\frac{\pi}{4}} \cos \ln 2 + j e^{\frac{\pi}{4}} \sin \ln 2$ (3)

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 2$ ponthoz tartozó Taylor sorait és adja meg azok konvergencia tartományát!

$$f(x) = e^{x+5}, \qquad g(x) = \frac{1}{x+7}$$

$f(x) = e^{x-2+7} = e^7 e^{x-2} = e^7 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$ (3) $x \in (-\infty, \infty)$ (1)

$g(x) = \frac{1}{x-2+9} = \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{-(x-2)}{9}} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^{n+1}} (x-2)^n$ (4)

$\left|-\frac{x-2}{9}\right| = \frac{|x-2|}{9} < 1 \Rightarrow |x-2| < 9$ K.T.: $(-7, 11)$ (2)

10. feladat (9 pont)

$$f(x,y,z) = z + \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}, \qquad P_0(-1,1,0)$$

$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel (2,-1,1)$

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \mathrm{grad}\, f(P_0) \cdot \underline{e}$ (2)

$f'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\, y \cdot \frac{-1}{x^2}$; $f'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x}$; $f'_z = 1$ (3)

$\mathrm{grad} f(P_0) = -\frac{1}{2}\underline{i} - \frac{1}{2}\underline{j} + \underline{k}$ (1)

$\underline{v} = 2\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$ $|\underline{v}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ $\underline{e} = \frac{2}{\sqrt{6}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{k}$ (1)

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \left(-\frac{1}{2}\underline{i} - \frac{1}{2}\underline{j} + \underline{k}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{k}\right) =$

$= -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}$ (2)