

1. Feladat (3+7=10 pont)

Mi a kapcsolat korlátos és konvergens sorozatok között? Mondja ki és bizonyítsa be a tanult tételt!

2. Feladat (6+6=12 pont)

Számolja ki az alábbi limeszeket, amennyiben léteznek!

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{2n+3} \right)^{2n} =? \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln(4x) =? \quad (x \in \mathbb{R})$$

3. Feladat (12 pont)

Az $f(x) = \sin(x)$ függvény grafikonjának a $[0, \pi]$ intervallumba eső részét megforgatjuk az x -tengely körül. Mekkora az így kapott forgástest térfogata?

4. Feladat (12 pont)

Írja föl azt a legalacsonyabb rendű homogén lineáris, állandó (valós) együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldása az $y(x) = 3e^{2x}(\sin(3x) + 5)$ függvény! Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását is!

5. Feladat (4+10+4=18 pont)

- (a) Mondja ki a függvénytörök tagonkénti integrálhatóságáról tanult tételt!
- (b) Határozza meg az $f(x) = \arctg x$ függvény origó középpontú Taylor-sorát, valamint a sor konvergenciasugarát! (Ismertesse a tanult levezetést!)
- (c) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = ?$ (A sorfejtés segítségével adjon választ!)

6. Feladat * (8+6=14 pont)

- (a) Ismertesse a síkbeli polár-koordinátákat egy rajzon, és számolja ki a síkbeli polár-transzformáció Jacobi-determinánsának értékét!
- (b) Integrálással határozza meg az $R \geq 0$ sugarú gömb térfogatát!

7. Feladat * (12 pont)

Határozza meg az $f(x) = |\sin(x)|$ függvény Fourier-sorában az a_0 , a_1 és b_5 együtthatókat! (Az a_k együtthatók tartoznak a koszinusz függvényhez, a b_k együtthatók pedig a szinusz függvényhez.)

8. Feladat * (3+3+4=10 pont)

- (a) Definiálja egy függvény Fourier-transzformáltját!
- (b) Definiálja két függvény konvolúcióját!
- (c) Mondja ki a Fourier-transzformáció és a konvolúció kapcsolatáról tanult tételt! (Bizonyítás nélkül.)