ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

1. Zárthelyi

2009.10.05.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (11 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenletnek az adott kezdeti feltételt kielégítő megoldását!

$$\operatorname{sh}(y)y' = \operatorname{ch}(y)\operatorname{sh}(x), \qquad y(0) = 1.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} y} \operatorname{sh} x$$

$$\int \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y}\, dy = \int \operatorname{sh} x \, dx \qquad 3$$

$$\ln \operatorname{ch} y^{\,3} = \operatorname{ch} x + C^{\,3}$$

Kezdeti érték: $\ln \operatorname{ch} 1 = 1 + C \implies C = \ln \operatorname{ch} 1 - 1$ 2

$$y_{kezd}(x) = \operatorname{arch}\left(e^{\ln \operatorname{ch} 1 - 1} \cdot e^{\operatorname{ch} x}\right)$$

2. feladat (16 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenlet összes megoldását!

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

(H) $\boxed{6}$

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \qquad y \equiv 0 \text{ m.o.}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \qquad 2$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C^{\,2}$$

$$y(x) = \pm e^{C} \cdot x$$

$$\boxed{y_{H,á}(x) = K \cdot x\,; \quad K \in \mathbb{R}} \quad 2$$

(I) 10

$$y_{I,p}(x) = K(x)\cdot x \quad (2)$$

$$y'_{I,p}(x) = K'(x)\cdot x + K(x)$$

$$K'(x)\cdot x + \cancel{K(x)} - \frac{\cancel{K(x)\cdot x}}{\cancel{x}} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$K'(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (3) \quad ; \quad K(x) = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \quad (3)$$

$$\boxed{y_{I,p}(x) = \frac{x}{2}\ln(1+x^2)} \quad ; \quad y_{I,ált}(x) = y_{H,ált}(x) + y_{I,p}(x) = K\cdot x + \frac{x}{2}\ln(1+x^2)$$

$$K \in \mathbb{R} \quad (2)$$

3. feladat (15 pont)

Az $u(x) = 3x + y$ új változó bevezetésével oldja meg a következő differenciálegyneletet!

$$y' = (3x+y)^2 + 1$$

$$u' = 3 + y' \implies y' = u' - 3$$

$$u' - 3 = u^2 + 1 \quad (3)$$

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 4$$

$$\int \frac{du}{u^2+4} = \int dx \quad (3) \quad ; \quad \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{2} + C \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{2} = x + C \quad (2) \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{2} = 2(x+C)$$

$$u(x) = 3x + y = 2\,\operatorname{tg}(2(x+C))$$

$$y(x) = 2\,\operatorname{tg}(2(x+C)) - 3x \quad (3)$$

4. feladat (16 pont)

$$y' = (x + 2y)^2 - 4$$

a) Rajzolja fel a differenciálegyenlet $A(2, 0)$ és $B(2, -1)$ pontokon áthaladó izoklináit! Rajzoljon be néhány vonalelemet is!

b) A differenciálegyenlet megoldása nélkül határozza meg az $A(2, 0)$, ~~illetve a $B(2, -1)$~~ ponton áthaladó megoldásgörbe első és második deriváltját!

c) Milyen lokális tulajdonságai vannak az A ponton áthaladó megoldásgörbének az A pontban?

a, $\boxed{8}$

$A(2,0)$: $(x+2y)^2 - 4 = (2+0)^2 - 4 = 0$

$(x+2y)^2 = 4$

$x + 2y = \pm 2$

$y = -\frac{1}{2}x \pm 1$ (2)

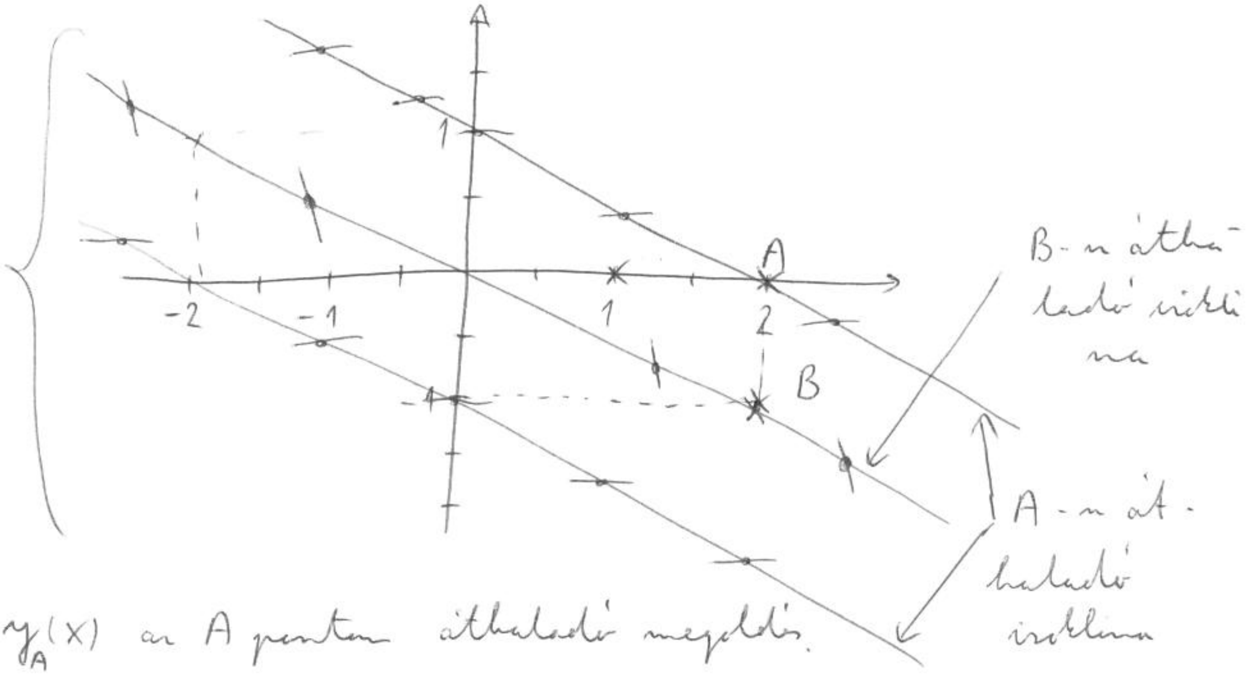
$B(2,-1)$:

$(x+2y)^2 - 4 = (2-2)^2 - 4 = -4$

$(x+2y)^2 = 0$

$y = -\frac{1}{2}x$ (2)

(4)



b, $\boxed{6}$ Legyen $y_A(x)$ az A ponton áthaladó megoldás.

$y_A'(2) = (2+0)^2 - 4 = 0$ (2)

Implicit deriválással kapjuk, hogy

$y'' = 2(x+2y)\cdot(1+2y')$ (2) tehát

$y_A''(2) = 2(2+0)(1+2\cdot 0) = 4$ (2)

c, $\boxed{2}$ $y_A'(2) = 0$ és $y_A''(2) = 4 > 0$ tehát az y_A megoldásnak

A-ban lokális minimuma van. (2)

5. feladat (15 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''' + y'' - 6y' = 2 + \sin(x)$$

(H) $y''' + y'' - 6y' = 0$

$\lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda^2 + \lambda - 6) = \lambda(\lambda+3)(\lambda-2) = 0$

$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = -3$ 3

$y_{H,ált}(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}$ 2 ; $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

(I) A 2-tagnál külső rezonancia van, tehát a kísérletező függvény:

$y_{I,p}(x) = Ax + B\sin x + C\cos x$ 3

$y'_{I,p}(x) = A + B\cos x - C\sin x$ /(-6)

$y''_{I,p}(x) = -B\sin x - C\cos x$ /1

$+$ $y'''_{I,p}(x) = -B\cos x + C\sin x$ /1

$2 + \sin x = -6A + \sin x(C - B + 6C) + \cos x(-B - C - 6B)$

$-6A = 2 \implies A = -\frac{1}{3}$

$7C - B = 1$ /(7)

$+$ $C + 7B = 0$

$50C + 0B = 7 \implies C = \frac{7}{50}$; $B = -\frac{C}{7} = -\frac{1}{50}$

$y_{I,p}(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{50}\sin x + \frac{7}{50}\cos x$ 5

2

$y_{I,ált}(x) = y_{H,ált}(x) + y_{I,p}(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{50}\sin x + \frac{7}{50}\cos x$

6. feladat (15 pont)

Vizsgálja meg a következő sorokat konvergencia szempontjából!

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n^2+n} \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+3}}$$

a, $a_n := \frac{n!}{n^n}$; Hányados-kritériummal:

5 $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

$\Longrightarrow$ konvergens.

b, Gyökkritériummal:

5 $$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} = \frac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{3/2}}{e^{1/2}} = e > 1$$

$\Longrightarrow$ divergens.

c, $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+3}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, tehát a sor divergens, mert a konvergencia szükséges feltétele ($a_n \to 0$) nem teljesül.

5

$$1 \leq n^2+3 \leq n^2+3n^2 = 4n^2$$

Rendőr szabály $$1 \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+3}} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{4n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{4}}\,\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \longrightarrow 1$$

7. feladat (12 pont)

Az a_n sorozat tagjai kielégítik a következő feltételeket:

$$5a_{n+2} = 16a_{n+1} - 3a_n, \qquad a_0 = a_1 = 7.$$

Határozza meg a sorozat általános elemét!

$5q^2 = 16q - 3$; $5q^2 - 16q + 3 = 0$ 3

$$q_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256-60}}{10} = \frac{16 \pm 14}{10} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{5} \end{cases}$$ 2

$$a_n = A\,q_1^n + B\,q_2^n = A\cdot 3^n + B\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n$$ 2

$$+\begin{cases} A + B = 7 & /(-3) \\ 3A + \frac{B}{5} = 7 \end{cases}$$

$$0 - 3B + \frac{B}{5} = -14 \implies -\frac{14}{5} B = -14 \implies \underline{\underline{B = 5}} \implies \underline{\underline{A = 2}}$$ 3

$$\underline{\underline{a_n = 2 \cdot 3^n + 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n}}$$ 2

Pótfeladatok. A következő feladatokat csak az elégséges szint (40%) eléréséhez javítjuk ki.

8. feladat (10 pont)

Adja meg a következő differenciálegyneletet összes megoldását!

$$y' = (y-1)^3 \sin(3x), \qquad (y > 1)$$

Milyen típusú differenciálegyenletről van szó?

$$\int \frac{dy}{(y-1)^3} = \int \sin(3x)\, dx$$ 2

$$-\frac{1}{2}(y-1)^{-2} = \frac{-1}{3}\cos(3x) + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$ 2 2

$$\underline{\underline{y(x) = \left(\frac{2}{3}\cos(3x) + 2C\right)^{-1/2} + 1}}$$ 2

Szétválasztható diff. egyenlet. 2

9. feladat (10 pont)

Írja föl azt a legalacsonyabb rendű, állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenletet, melynek megoldása az x és $\sin(x)$ függvény!

x megoldás $\implies \lambda = 0$ kétszeres gyök! 3

$\sin x$ — " — $\implies \lambda = \pm i$ komplex gyökpár 2

Karakterisztikus polinom:

$$\lambda^2 (\lambda + i)(\lambda - i) = \lambda^2 (\lambda^2 + 1) = \lambda^4 + \lambda^2$$ 3

A keresett egyenlet:

$$\underline{\underline{y^{(4)} + y'' = 0}}$$ 2