Keresztfélév - 1. vizsga

A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. Amennyiben egy feladat máshogy nem rendelkezik, a számszerű végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsük, vagy normál tört alakban adjuk meg. Minden feladat 10 pontot ér. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. a) Hogyan definiáltuk az előadáson egy valószínűségi változó szórásnégyzetét?

   b) Mit értünk az alatt, hogy egy valószínűségi változó örökifjú a pozitív egészek halmazán? Milyen eloszlású valószínűségi változók teljesítik a fenti tulajdonságot?

2. Összekeverünk 4 kártyalapot, melyek közül pontosan az egyik piros, majd (lefordíva és) egymásra téve őket magunk elé helyezzük a lapokat. Ezek után elkezdünk dobálni egy szabályos érmét. Legfeljebb 4-szer dobunk, de amennyiben egy dobásnál írás az eredmény, megállunk. Végül annyi kártyát húzunk a megkevert lapokból (mindig a felsőt kihúzva), ahány fejet dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy 4 darab fejet dobtunk, ha tudjuk, hogy a húzott lapok között van piros?

3. Két dobókockával dobunk. Jelölje X a dobott számok maximumát, Y pedig a dobott számok minimumát. Adjuk meg az X és az Y együttes eloszlását.

4. Legyen $X \sim B(10; 0{,}2)$ binomiális eloszlású valószínűségi változó, továbbá legyen $Y = 3X + 2$. Számoljuk ki az X és az Y korrelációját.

5. Egy program egyenletesen véletlenszerűen generál egy egész számot az $[1; 5]$ zárt intervallumban (tehát az intervallumban minden egész szám 1/5 valószínűséggel adódik kimenetként). Tegyük fel, hogy ezzel a programmal egymástól függetlenül 1000 értéket generálunk, végül pedig összeadjuk a kapott eredményeket. Mi az összeg várható értéke és szórása? Közelítőleg mi a valószínűsége, hogy az összeg nagyobb, mint 2900, de kisebb, mint 3100?

6. Az 5. feladatban szereplő program segítségével generálunk egy 15 elemű mintát, és a következőt kapjuk:

   $$2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 5,\ 5,\ 2,\ 3,\ 5,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2.$$

   Számoljuk ki erre a mintára a mintaátlagot és a korrigált tapasztalati szórást. Adjuk meg a tapasztalati eloszlásfüggvényt is.

Eloszlás neve	Jelölés	ran$X$	$\mathbb{P}(X=k)$ v. $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$1-p$, p	-	p	$p(1-p)$
binomiális	$B(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	-	np	$np(1-p)$
geometriai	$Geo(p)$	$\mathbb{N}^+$	$(1-p)^{k-1}p$	-	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$U(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$Exp(\lambda)$	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$N(\mu;\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

A Student-eloszlás kvantiliseinek táblázata

	Szignifikanciaszint $(1-\varepsilon)$				
Szabadsági fok	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	2,920	4,303	6,965	9,925	31,599
3	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
24	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
50	1,676	2,009	2,403	2,678	3,496
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,416
100	1,660	1,984	2,364	2,626	3,390
500	1,648	1,965	2,334	2,586	3,310

A sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998