A3 1. vizsgazh, 2012 ősz

1. Oldja meg Laplace-transzformáció alkalmazása nélkül az $y'' - y' - 2y = \sin 2x$ differenciál-egyenletet!

2. Legyen K az R sugarú (és magasságú), z tengelyű origó csúcsú $\pi/4$ félnyílás-szögű, $z \geq 0$ féltérbeli, kifelé irányított (felülről zárt) kúp. Számítsa ki a $v(r) = 3r$ ($r \in \mathbb{R}^3$) vektor-vektor függvény felületmenti integrálját K-n!

3. Legyen $v(x, y, z) = (y, xy, x\sin^2 z)$. Számítsa ki a $\operatorname{rot} v$ vektorfüggvény felületi integrálját egy olyan kifelé irányított gúla palástján, aminek az alapja az $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,1,0)$ háromszög, és csúcsának 3. koordinátája pozitív!

4. Adja meg az $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}$ függvény összes 0 körüli Laurent-sorát! Hol és milyen szingularitása van f-nek?

5. Számítsa ki $\int \frac{\operatorname{ch} z}{z^3}\, dz$-t a pozitívan irányított (a) $|z - 2i| = 3$ és (b) $|z - 2i| = 1$ körvonalon!

6. (a) Igaz-e: ha egy függvény a komplex síknak csak egyetlen pontjában nem deriválható, akkor minden komplex szám körül csak egy Laurent-sora van.
(b) Mikor mondjuk, hogy egy komplex függvény reguláris egy pontban?
(c) Mi az r görbe ívhossz szerinti (vagy természetes) paraméterezése?

A3 1. vizsgazh, 2012 ősz

1. Oldja meg Laplace-transzformáció alkalmazása nélkül az $y'' - y' - 2y = \sin 2x$ differenciál-egyenletet!

MO. (1) Homogén: $y'' - y' - 2y = 0$ karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \rightsquigarrow$ $\lambda = 2, -1$, tehát $y_{ha} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$. 3p

(2) Inhomogén: $0+2i$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért y_{ip}-t $P\cos 2x + Q \sin 2x$, $P, Q \in \mathbb{R}$ alakban keressük. 2p

$y'_{ip} = -2P\sin 2x + 2Q\cos 2x$, $y''_{ip} = -4P\cos 2x - 4Q\sin 2x$. Visszahelyettesítve: $\sin 2x = (-6P - 2Q)\cos 2x + (-6Q + 2P)\sin 2x$, azaz $P = 1/20$, $Q = -3/20$. Így $y_{ip} = \frac{1}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\sin 2x$, 4p

és az inhomogén általános megoldása $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\sin 2x$. 1p

10p

2. Legyen K az R sugarú (és magasságú), z tengelyű origó csúcsú $\pi/4$ félnyílásszögű, $z \geq 0$ féltérbeli, kifelé irányított (felülről zárt) kúp. Számítsa ki a $v(r) = 3r$ ($r \in \mathbb{R}^3$) vektor-vektor függvény felületmenti integrálját K-n!

MO. A kúp palástján az integrandus merőleges a felületi normálisra, így az integrál ott 0. 3p

Legyen F a kúp alaplapja. Ennek felületi egységnormálisa $\mathbf{k}$, az integrandus erre eső vetülete F-en $v_n = 3R$, ezért $\int_K v\, df = \int_F v\, df = \int_F v_n |\,df| = 3R \int_F |\,df| = 3R^3\pi$.

($\int_F v\, df$-t természetesen a definíció alapján is ki lehet számolni:

F egyenlete: $r(u, v) = (u\cos v, u \sin v, R)$, $u \in [0, R]$, $v \in [0, 2\pi]$, ezért $r_u \times r_v = (0, 0, u)$, és így

$$\int_F v\, df = \int_0^{2\pi} \int_0^R 3(u\cos v, u\sin v, R)(0,0,u)\, du dv$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^R 3Ru\, du dv = 3R \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2}\, dv = 3R^3\pi$$

) 7p

10p

Vagy: Gauss-Osztrogradszkij tétellel. $\operatorname{div} 3r = 9$, 3p

így (G-vel jelölve a K által bezárt térrészt, $\int_F v\, df = \int_G 9\, dV = 9$(a kúp térfogata) $= 9(\frac{1}{3}\pi R^2 R) = 3R^3\pi$ 7p

10p

3. Legyen $v(x, y, z) = (y, xy, x\sin^2 z)$. Számítsa ki a $\operatorname{rot} v$ vektorfüggvény felületi integrálját egy olyan kifelé irányított gúla palástján, aminek az alapja az $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,1,0)$ háromszög, és csúcsának 3. koordinátája pozitív!

MO. Legyen L a pozitívan irányított háromszögvonal, H a palást. A Stokes-tétel szerint $\int_H \operatorname{rot} v\, df = \int_L v\, dr$, tehát elég ez utóbbit kiszámítani. 3p

A háromszög egyik befogóján az integrandus 0, a másikon pedig merőleges az integrálási útra, ezért ezeken a vonalintegrál 0. 3p

Az átfogó: $r(t) = (2-2t, t, 0)$ $(t \in [0,1])$, $\dot r(t) = (-2, 1, 0)$,

tehát $\int_L v\, dr = \int_0^1 v(r(t))\dot r(t)\, dt = \int_0^1 (t, 2t - 2t^2, 0)(-2, 1, 0)\, dt = \int_0^1 -2t^2\, dt = -\frac{2}{3}t^3\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}$. 4p

10p

4. Adja meg az $f(z) = \frac{z-\sin z}{z^3}$ függvény összes 0 körüli Laurent-sorát! Hol és milyen szingularitása van f-nek?

MO. $\frac{\sin z}{z^3} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k-2}}{(2k+1)!}$, tehát
$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{\sin z}{z^3} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{z^{2k-2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+3)!} = \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \dots$
f-nek egyetlen 0 körüli Laurent-sora van, mert f 0-n kívül reguláris. Csak 0-ban van szingularitása, és az megszüntethető, mert a 0 körüli Laurent-sorában nincs negatív kitevőjű tag.

5. Számítsa ki $\int \frac{\operatorname{ch} z}{z^3}\, dz$-t a pozitívan irányított (a) $|z-2i| = 3$ és (b) $|z-2i| = 1$ körvonalon!

MO. $\frac{\operatorname{ch} z}{z^3}$ az origón kívül reguláris, ezért a (b)-beli körvonalon az integrál 0 az (a)-belin pedig a differenciálhányadosokra vonatkozó Cauchy-féle integrál-formula miatt $\int \frac{\operatorname{ch} z}{z^3}\, dz = \operatorname{ch}^{(2)}(0)\frac{2\pi i}{2!} = \pi i$.

Vagy: $\operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$, tehát $\operatorname{Res}_0 \frac{\operatorname{ch} z}{z^3} = \frac{1}{2}$, és így a reziduum-tétel miatt $\int \frac{\operatorname{ch} z}{z^3}\, dz = \pi i$.

6. (a) Igaz-e: ha egy függvény a komplex síknak csak egyetlen pontjában nem deriválható, akkor minden komplex szám körül csak egy Laurent-sora van.
(b) Mikor mondjuk, hogy egy komplex függvény reguláris egy pontban?
(c) Mi az r görbe ívhossz szerinti (vagy természetes) paraméterezése?

MO. (a) Nem; pl. $\frac{1}{z}$-nek 1 körül kettő (egy, amelyik $\{ z\colon |1-z| < 1 \}$ és egy másik, amelyik az $\{ z\colon |1-z| > 1 \}$ tartományon állítja elő)

(b) Ha van a pontnak olyan környezete, amelyben a függvény deriválható.

(c) $\rho(s) = r(t(s))$, ahol t az $s(t) = \int_a^t |\dot{r}(\tau)|\, d\tau$ szigorúan monoton növő függvény inverze.