Bevezetés a Számításelméletbe II.

az én pici vizsgajegyzetem vol2.

tárgymutató:

I. tétel	24., 25. oldalak
II. tétel	1., 2., 3. oldalak
III. tétel	4. oldal
IV. tétel	5. oldal
V. tétel	6. oldal
VI. tétel	7., 8. oldalak
VII. tétel	9. oldal
VIII. tétel	10., 11. oldalak
IX. tétel	12., 13. oldalak
X. tétel	14., 15. oldalak
XI. tétel	15., 16. oldalak
XII. tétel	16., 17., 18. oldalak
XIII. tétel	19., 20. oldalak
XIV. tétel	21. oldal
XV. tétel	22., 23. oldalak
XVI. tétel	23. oldal

BSZL

Vége!

II. tétel:

Gráf definíció: Egy gráf egy rendezett pár, $G=(V,E)$, ahol V egy nem üres halmaz, E pedig az ebből a halmazból képezhető párok egy halmaza. $\forall v \in V$: pontok vagy csúcsok, $\forall e \in E$: élek.
$V(G)$: pontok halmaza, $E(G)$: élek halmaza.
$v(G)=|V(G)|$, $e(G)=|E(G)|$.

Hurokél, többszörös él definíció: Ha az $e \in E$ a $v_1, v_2 \in V$ párnak felel meg, akkor hurokélnek nevezzük azokat az éleket, melyekre $v_1=v_2$. Ha két különböző nem hurokél végpontjai azonosak, a két élet párhuzamos vagy többszörös élnek nevezzük.

Egyszerű gráf definíció: Azokat a gráfokat, melyek nem tartalmaznak hurokéleket és párhuzamos éleket, egyszerű gráfnak nevezzük.

Komplementer definíció: A G' részgráf komplementere az a $G''=(V'',E'')$ gráf, melyre $V''=V'$ és $E''=E'-E''$. Egy G gráf komplementerén azt a $\bar{G}$ gráfot értjük, amelyet akkor kapunk, ha G-t a $K_{v(G)}$ teljes gráf részgráfjának tekintjük és $\bar{G}$-ben azok a pontpárok vannak összekötve, amik G-ben nincsenek.

Izomorfia definíció: G és G' gráfok izomorfak, ha $\exists$ olyan bijekció, hogy G-ben pontosan akkor szomszédos két pont, ha a nekik megfelelő pontok szomszédosak G'-ben és ugyanannyi él van közöttük.

Részgráf

definíció: A G' gráf a G gráf részgráfja, ha $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, valamint egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra G'-ben, ha G-ben is illeszkedő.

Feszítő részgráf

definíció: Egy G' gráf a G gráf feszítő részgráfja, ha G' részgráfja G-nek és $V' = V$.

Feszített részgráf

definíció: Ha E' pontosan azokból az E-beli élekből áll, amelyeknek mindkét végpontja V'-ben van és E' az összes ilyen élet tartalmazza, akkor G' a G gráf V' által feszített részgráfja.

Élsorozat, út, kör

definíció: Egy $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozatot élsorozatnak nevezünk, ha e_i a v_{i-1}-et és v_i-t összekötő él. Ha $v_0 = v_k$, akkor az élsorozat zárt. Ha a csúcsok mind különbözők, akkor egy útról beszélünk. Ha $v_0 = v_k$ és különben a csúcsok mind különbözők, akkor ez egy kör a gráfban.

Összefüggőség

definíció: Egy G gráf összefüggő, ha bármely két csúcs között $\exists$ út.

Komponens

definíció: G gráf komponense olyan H feszített részgráfja G-nek, amire teljesül, hogy H összefüggő és bárhogy veszünk hozzá egy további csúcsot, már nem összefüggő feszített részgráfot kapunk.

Fa, erdő

definíció: Az összefüggő körmentes gráfokat fának, az összefüggőség hiányában erdőnek nevezzük.

Fa fokszáma

tétel: ∀ legalább 2 pontú fában ∃ legalább két egyfokú pont (levél)

Biz.: leghosszabb út + új él ellentmondás (...)

Fa élszáma

tétel: n pontú fa éleinek száma n-1.

Biz: triviális (...)

Feszítőfa

definíció: Az F gráf G gráf feszítőfája, ha F fa és részgráfja G-nek.

Feszítőfa létezése

tétel: ∀ összefüggő gráf tartalmaz feszítőfát

Biz: körökből elhagyogatok (...)

III. tétel:

BFS

algoritmus: Nem egy bonyolult történet, így nem részletezem.

Minimális (össz)súlyú feszítőfa:

definíció:

Legyen G gráf és az éleihez rendelt $\omega: E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. A gráf azon feszítőfáját, melyre ez a súlyfüggvény minimális, G minimális (össz)súlyú feszítőfájának nevezzük.

Kruskal-algoritmus:

Sorba kell rendezni az éleket a súlyfüggvény szerinti növekvő sorrendben, majd úgy bevenni éleket, hogy az épülő fa (~~körmentes~~) ne "romolj'on" el, azaz ne alkosson az újonnan bevett éllel kört, mindezt az egyre nagyobb súlyú élekkel (ahogy már nem tudunk egy súlyból a fentiek szerint élet hozzávenni, haladunk a nagyobb súlyú élekhez). A futás véget ér, ha már nem tudunk új élet bevenni.

tétel: Az algoritmus minimális (össz)súlyú feszítőfát produkál.

Biz.: túl hosszú, hogy leírjam!...)

IV. tétel:

Síkbarajzolhatóság definíció:

Egy G gráf síkbarajzolható, ha lerajzolható úgy, hogy az élei a csúcsokon kívül sehol máshol ne keresztezzék egymást.

Tartományok definíció:

Egy G síkbarajzolt gráf tartományain azon síkrészeket értjük, melyeket közrefognak az élek.

Gömbre rajzolhatóság tétel:

Egy G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.

Biz.: póluspont kijelölései aztán egyenesek (..)

Euler-Formula tétel:

Ha egy összefüggő síkbeli gráfnak n csúcsa, e éle és t tartománya van (beleértve a külsőt is), akkor: $n+t=e+2$.

Biz.: elhagyok egy élet $\Rightarrow -1$ tartomány (..)

Becslés az élek számára tételek:

Ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf és pontjainak száma legalább 3: $e \leq 3n-6$,

Biz.: t-ket határoló élek: $c_i \geq 3$

$$3t \leq c_1 + \dots + c_t = \sum_{i=1}^{t} c_i \leq 2e \quad (\dots)$$

Továbbá ha G-ben $\nexists$ 3 hosszú kör, akkor $e \leq 2n-4$

Biz.: hasonlóképp (..)

V. tétel:

Kuratowski-tétel: Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz olyan részgráfot, amely topológiailag izomorf lenne $K_{3,3}$-al, vagy K_5-tel.

Biz.: (csak könnyű irány) $K_5: e \leq 3n-6$

$K_{3,3}: e \leq 2n-4$ (...)

Topológiai izomorfia definíció: Transzformációk: egy élet egy 2 hosszú úttal helyettesítünk, vagy fordítva.

Két gráf topológiailag izomorf, ha a fenti transzformációk alkalmazásával egymással izomorf gráfokká transzformálhatók.

Duális definíció: Egy G gráf dualisát úgy kapjuk meg, hogy G tartományaihoz rendelünk pontokat (G^* pontjai) és G^*-ban akkor kötünk össze pontokat, ha a megfelelő G-beli tartományoknak $\exists$ közös határvonala

Fáry-Wagner tétel: Ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor $\exists$ olyan síkbeli ábrázolása is, melyben $\forall$ élet egy egyenes szakasszal rajzoltunk le.

VI. tétel:

Euler-út és kör definíció:

A G gráf Euler-körének nevezünk egy zárt élsorozatot, ha az élsorozat pontosan egyszer tartalmazza G összes élét. Ha az élsorozat nem feltétlenül zárt, akkor Euler-utat kapunk.

Euler-kör létezése tétel:

G összefüggő gráfban akkor és csak akkor létezik Euler-kör, ha G minden pontjának foka páros.

Biz.: jó hosszan tárgyalni, hogyha bemegyek valahova, akkor onnan ki is kell menni (...)

Euler-út létezése tétel:

G összefüggő gráfban akkor és csak akkor létezik Euler-út, ha a páratlan fokszámú pontok száma 0 vagy 2.

Hamilton-út és kör definíció:

Egy G gráfban Hamilton-körnek nevezünk egy H kört, ha az G minden pontját pontosan egyszer tartalmazza. Egy utat pedig Hamilton-útnak nevezünk, ha G minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére tétel:

Ha G gráfban $\exists$ k pont, melyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik, akkor G-ben $\nexists$ Hamilton-kör. Ha több, mint k+1 komponensre esik, akkor G-ben Hamilton-út sem létezik.

Biz.: triviális (..)

Ore: Elégséges feltétel Hamilton-kör létezésére tétel:

Ha az n pontú, egyszerű G gráfban $\forall x, y \in V(G): (x,y) \notin E(G): d(x)+d(y) \geq n$, akkor G-ben $\exists$ Hamilton-kör.

Biz.: indirekt, elégmacerás (..)

Dirac: Elégséges feltétel Hamilton-kör létezésére tétel:

Ha egy n pontú egyszerű gráfban $\forall$ pont foka legalább n/2, akkor a gráfban $\exists$ Hamilton-kör.

Biz.: az Ore-ből következik.

VII. tétel:

Gráfok színezése

definíció: Egy G egyszerű gráf k színnel kiszínezhető, ha ∀ csúcsot ki lehet színezni k szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző legyen. G kromatikus száma: $\chi(G)=k$, ha G k színnel kiszínezhető, de k-1 színnel nem. Egy ilyen színezésnél az azonos színt kapott pontok halmazát színosztálynak nevezzük.

klikk definíció: G egy teljes részgráfját klikknek nevezzük. A G-ben található maximális méretű klikk méretét azaz pontszámát $\omega(G)$-vel jelöljük és a gráf klikkszámának nevezzük.

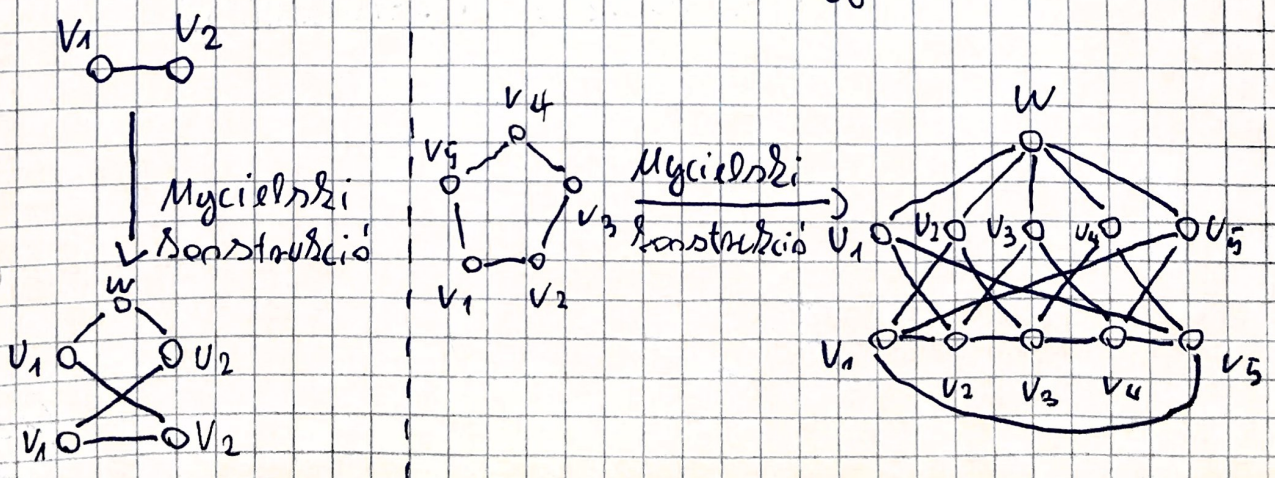
$\chi(G)$ és $\omega(G)$ viszonya tétel: Minden G gráfra $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Biz.: triviális (..)

Mycielski-konstrukció tétel: Minden $k \geq 2$ egész számra $\exists$ olyan G_k gráf, hogy $\omega(G_k)=2$ és $\chi(G_k)=k$.

Biz.: nem valami egyszerű (..)

példák:



VIII. tétel:

Mohó színezés algoritmus:

Sorbarendezi a csúcsokat, majd végigiterál rajtuk olyan módon, hogy v_i-hoz azt a legkisebb színt rendeli, amit $(v_1, \dots, v_{i-1})$ szomszédokhoz még nem rendelt.

$\chi(G)$ és $\Delta(G)$ viszonya tétel:

Minden G gráfra: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Biz.: mohó színezéssel (...)

Info: $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, ha G teljes gráf, vagy kör nélküli páratlan hosszú kör

Intervallumgráf definíció:

Legyenek $I_i = [a_i, b_i]$, $i \in \mathbb{N}$ korlátos, zárt intervallumok. Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_i$ egy G gráf pontjai és (P_j, P_k) pontosan akkor legyen él G-ben, ha $I_j \cap I_k \neq 0$. Az így előálló gráfokat intervallumgráfoknak nevezzük.

Intervallumgráf színezése tétel:

Ha G intervallumgráf, akkor $\chi(G) = \omega(G)$.

Biz.: mohó színezéssel (...)

(kijön, hogy intervallumgráfokra a mohó színezés optimális)

Páros gráf definíció:

Egy G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha G pontjainak V(G) halmaza két - egy A és B - halmazra osztható úgy, hogy G minden élének egyik végpontja A-ban, másik végpontja B-ben van. Ennek jelölése: $G=(A,B)$.

A $K_{a,b}$-vel jelölt teljes páros gráf olyan $G=(A,B)$ páros gráf, ahol $|A|=a$ és $|B|=b$ és amelyben $\forall$ A-beli pont össze van kötve $\forall$ B-beli ponttal.

Párosítás létezése tétel:

Egy G gráf akkor és csak akkor páros, hogyha $\forall$ G-ben lévő kör páros hosszú.

Biz.: triviális (...)

Kromatikus szám és párosítás kapcsolata tétel:

Egy legalább egy élet tartalmazó G gráf akkor és csak akkor páros, ha $\chi(G)=2$.

Biz.: triviális (...)

IX. tétel:

Párosítás definíció:

Párosításnak vagy részleges párosításnak nevezünk egy M élhalmazt, ha semelyik két élének nincs közös pontja. Az ilyen éleket független éleknek nevezzük. A részleges párosítás lefedi éleinek végpontjait. Egy párosítás teljes párosítás, ha a gráf ∀ pontját lefedi.

Független- és lefogó élek/pontok definíció:

$\nu(G)$: G-beli független élek maximális száma

$\alpha(G)$: G-beli független pontok maximális száma

$\tau(G)$: G-beli lefogó pontok minimális száma

$\rho(G)$: G-beli lefogó élek minimális száma.

$\nu(G), \alpha(G), \rho(G), \tau(G)$ összefüggés tétel:

∀ G gráfra: $\nu(G) \leq \tau(G)$

$\alpha(G) \leq \rho(G)$.

Biz.: Legyen M maximális méretű független élhalmaz. Mivel már M éleinek lefogásához |M| pontra van szükség, ezért $\tau(G) \geq |M| = \nu(G)$.
Másik ehhez hasonlóan (...)

Gallai I:

$\tau(G), \delta(G), v(G)$

Kapcsolata tétel: Minden kiromlamentes G gráfra:

$\tau(G) + \delta(G) = v(G) = n.$

Biz.: Egy X pontkalmaz pontosan akkor fgtlen, ha $V(G)\setminus X$ lefogó (kiszen ha X nem fgtlen, akkor egy él kimarad). Fordítva, ha $V(G)\setminus X$ nem fog le egy nem kiromlott élet, akkor X-ben ezen él mindkét pontja benne van $\Rightarrow$ $\tau(G) \leq |V(G)\setminus X|$, ami adja a tétel állítását.

Gallai II:

$\nu(G), \rho(G), v(G)$

Kapcsolata tétel: Minden olyan G gráfra, melyben $\nexists$ izolált pont:

$\nu(G) + \rho(G) = v(G) = n$

Biz.: Egy $\nu(G)$ elemű X fgtlen illeszkedő lefog $2\nu(G)$ pontot. A többi lefogható $v(G) - 2\nu(G)$ éllel, így $v(G) - \nu(G) \geq \rho(G)$. Mivel $\rho(G)$ k db csillagból áll, így $\rho(G) = v(G) - k$. A csillagból 1 fgtlen: $\nu(G) + \rho(G) = v(G) = n$.

Tutte-tétel

Teljes párosítás létezése: Egy G gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha $\forall X \subseteq V(G)$-re $c_p(G-X) \leq |X|$, azaz akárhogy hagyunk el G-ből k pontot, a maradékban a páratlan komponensek száma legfeljebb k ($c_p(G)$: G páratlan komponenseinek száma).

Biz.: csak szükséges: triviális (–)

X. tétel:

Alternáló út definíció: Legyen P részleges párosítás egy gráfban. Ekkor alternáló útnak nevezünk egy olyan élsorozatot, mely felváltva tartalmaz nem P-beli, illetve P-beli élet.

Javító út definíció: Legyen $G=(A,B,E)$ gráfban $P=(A,B)$ részleges párosítás. J javító út, ha párosítatlan A-ból indul, párosítatlan B-be érkezik és alternáló út.

Módosított BFS-javítóutas algoritmus: Bemenet: $G=(A,B,E)$ gráf & $M=(A,B)$ párosítás. Ha létezik a gráfban javító út, vegyük be (a nem M-beli élet bevesszük a régi M-beliek helyére), ezt folytassuk, amíg már nem lesz új javító út. Ekkor a kapott párosítás maximális.

König: $\delta(G)$ és $\rho(G)$, ill. $\nu(G)$ és $\tau(G)$ kapcsolata tétel: Ha G páros gráf, akkor $\nu(G)=\tau(G)$. Ha G-ben ~~b~~ izolált pont, akkor $\delta(G)=\rho(G)$ is teljesül.

Biz.: triviális(-)

Hall: szükséges és elégséges feltétel párosításra tétel: Egy $G=(A,B)$ páros gráfban akkor és csak akkor $\exists$ A-t fedő párosítás, ha $\forall X \subseteq A: |N(X)| \geq |X|$.

Biz.: triviális(-) Info.: $N(X)$: X szomszédsága

Frobenius: szükséges és elégséges feltétel teljes párosításra

tétel:

Egy $G=(A,B)$ páros gráfban akkor és csak akkor $\exists$ teljes párosítás, ha $|A|=|B|$ és $|N(X)| \geq |X|$ minden $X \subseteq A$-ra.

Biz.: triviális(..)

XI. tétel:

Reguláris gráf

definíció:

Egy gráfot k reguláris-nak nevezünk, ha $\forall$ foka k. Egy gráfra azt mondjuk, hogy reguláris, ha létezik olyan k, melyre k-reguláris.

Reguláris gráfban teljes párosítás

tétel:

Minden páros reguláris gráfban $\exists$ teljes párosítás.

Biz.: Frobenius(..)

Élszínezés

definíció:

Egy G gráf élei k színnel színezhetőek, ha minden élet ki lehet színezni k színnel úgy, hogy bármely két szomszédos él színe különböző legyen. G élkromatikus száma $\chi_e(G)=k$, ha G élei k színnel színezhetőek, de $k-1$-el már nem.

Vizing: $\chi_e(G)$ és $\Delta(G)$ kapcsolata

tétel:

Ha G egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G)+1$.

Biz.: nem kell.

Élkromatikus szám és $\Delta(G)$ kapcsolata tétel:

$\forall$ G gráfra $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$.

Biz.: triviális (...)

Nőnig: $\chi_e(G)$ és $\Delta(G)$ kapcsolata tétel:

Ha G páros gráf, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

Biz.: triviális (...)

XII. tétel:

Hálózat definíció:

Legyen G egy irányított gráf. Rendeljünk $\forall$ élhez egy $c(e)$ nemnegatív számot, amit az él kapacitásának nevezünk. Jelöljünk ki két pontot, s-t és t-t G-ben, melyet termelőnek és fogyasztónak nevezünk. Ekkor a (G, s, t, c) négyest hálózatnak nevezzük.

Folyam, folyamérték definíció:

Legyen $f(e)$ az a "cucc", ami az e élen folyik át. Ez az f függvény megengedett függvény, ha $f(e) \leq c(e)$ $\forall$ élre és $m(v) = \sum\{f(e) \mid e \text{ végpontja } v\} - \sum\{f(e) \mid e \text{ kezdőpontja } v\} = 0$ minden $v \in V(G)$-re, kivéve s-t és t-t. Egy megengedett függvényt folyamnak hívunk. Könnyen belátható, hogy $m(t) = -m(s)$. Ezt a közös értéket a folyam értékének nevezzük és m_f-el jelöljük. Egy él telített, ha $f(e) = c(e)$, ill. telítetlenek, ha $f(e) < c(e)$.

Vágás definíció: Legyen $s \in X \subseteq V(G) \setminus \{t\}$, sem X, sem $V(G)-X$ nem üres halmaz. Azoknak az éleknek a C halmazát, melyek egyik végpontja X-beli, másik $V(G)-X$-beli, a hálózati folyam egy (s,t)-vágásának nevezzük.
A vágás értéke, $c(C)$, azon éleken lévő kapacitások összege, melyek egy X-beli pontból egy $V(G)-X$-beli pontba mutatnak. Ezeket előremutató éleknek nevezzük.

Javítóút hálózatra algoritmus: Legyen a gráfban $s = v_0, v_1, \dots, v_k$ egy út, aminek most nem feltétlenül kell az irányítás szerint haladnia. Növelhetjük a folyam értékét abban az esetben, ha $\forall i = \{0, \dots, k-1\}$-re vagy $e_i = (v_i, v_{i+1})$ és $f(e_i) < c(e_i)$ vagy $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ és $f(e_i) > 0$. Ekkor az első típusú éleken növeljük, míg a második típusú alatt csökkentjük a folyam értékét, így az összes folyamérték nő. Az ilyen utakat javítóutaknak hívjuk.
Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha $\nexists$ javítóút s-ből t-be.
Biz.: hosszú és nyögvenyelős(...)

Ford-Fulkerson: max. vágás min. folyam tétel: A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, azaz $\max\{\text{mf} \mid \text{f egy folyam } s\text{-ből } t\text{-be}\} = \min\{c(C) \mid C \text{ vágás}\}$.

Biz.: triviális(...)

Edmonds-Karp: becslés a futási idejére

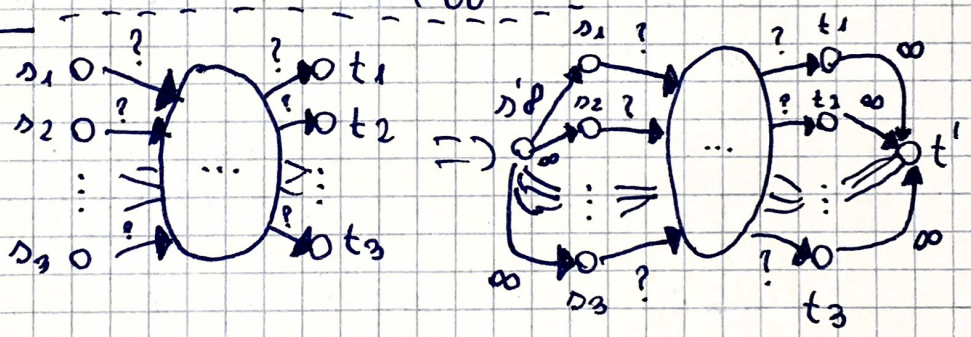
tétel: Ha mindig a legrövidebb javítóutat vesszük, akkor a maximális folyam meghatározásához szükséges lépések száma felülről becsülhető a pontok számának polinomjával.

Biz.: nem kell.

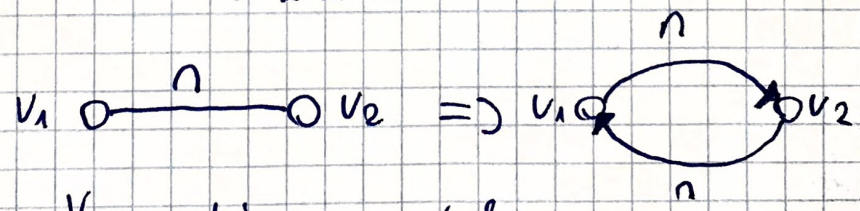
Egészértékűségi lemma: Ha (G, s, t, c) hálózatban $\forall$ él kapacitása egész szám, akkor $\exists$ olyan f maximális folyam, hogy f a G gráf $\forall$ élén egész értéket vesz fel. Az ilyen folyamot egészfolyamnak nevezzük.

A folyamproblémák általánosításai:

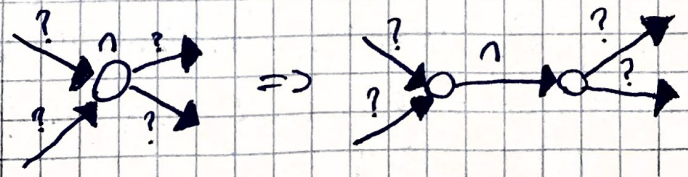
Több termelő & fogyasztó:



Irányítatlan élek:



Kapacitásos pontok:



XIII. tétel:

Diszjunkt utak definíció:

Vegyünk egy (G, s, t, c) folyamot, ezen belül vesszünk utakat. Páronként éldiszjunkt útnak nevezzük az utakat, ha páronként nincsen közös élük. Belsőleg pontdiszjunkt utaknak nevezünk utakat, ha páronként nincs közös pontjuk.

Menger: Éldiszjunkt irányított utak tétel:

Ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$, akkor az s-ből t-be vezető páronként élidegen irányított utak száma megegyezik az összes irányított s-t utat lefogó élek minimális számával.

Biz.: 1 kapacitású élek + Ford Fulkerson.

Menger: Pontdiszjunkt irányított utak tétel:

Ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az s-ből t-be vezető végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított s-t utat s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.

Biz.: pontokat szétnyomom élekké és az előző tétellel látom be.

Menger: Éldiszjunkt irányítatlan utak tétel:

Ha G egy irányítatlan gráf, $s, t \in V(G)$, akkor az s-ből t-be vezető élidegen irányítatlan utak maximális száma megegyezik az összes irányítatlan s-t utat lefogó élek minimális számával.

Biz.: Irányítottra kell visszavezetni, amúgy hasonló(...)

Menger: Pontdiszjunkt irányítatlan utak tétel:

Ha G egy irányítatlan gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az s-ből t-be vezető végpontoktól eltekintve pontidegen irányítatlan utak maximális száma megegyezik az összes irányítatlan s-t utat s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.

Biz.: Irányítatlan élek helyett irányított oda-vissza, majd az előző tételt alkalmazzuk.

Többszörös összefüggőség definíció:

Egy G gráfot k-szorosan összefüggőnek nevezünk, ha legalább k+1 pontja van és akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A gráf k-szorosan élösszefüggő, ha akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb élet, összefüggő gráfot kapunk.

Gráfok többszörös összefüggősége tétel:

A G gráf akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha legalább k+1 pontja van, és bármely két pontja között létezik k pontidegen út. Hasonlóan G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha bármely két pontja között létezik k élidegen út.

Biz.: triviális (...)

Menger: Többszörös összefüggőség & körök tétel:

A legalább 3 pontú G gráf akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha tetszőleges két pontján át vezet kör. Igaz az is, hogy akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha bármely 2 élén át vezet kör.

Biz.: Az első triviális, a második pedig az elsőből következik.

XIV. tétel:

Dijkstra algoritmus:

Nem negatív élsúlyú gráfban keres egy pontból legrövidebb utat az összes többibe.

Nyilvántartja azokat a csúcsokat, amikhez megvan a legrövidebb út (innentől "rész"), illetve ∀ csúcshoz az eddig talált legrövidebb utat és hogy ez melyik csúcsból jött (az utolsó előtti csúcs az úton). Először a kiindulópont van csak a részben, 0 távolsággal, ∀ más csúcs távolsága ∞. ∀ iterációban végigmegy a részbe utolsóként bekerült csúcs összes kimenő élét, javít a távolságokon, ha lehet, majd a legkisebb nem ∞ költségű élek közül egyet betesz a részbe. Ezt addig csinálja, míg nincs ∀ csúcs a részben.

Bellman-Ford algoritmus:

Ugyan azt csinálja, mint a Dijkstra, csak lassabban, de működik negatív élsúlyokkal is (kivéve ha van negatív kör, ekkor ez detektálható).

Nyilvántartja, hogy melyik csúcshoz mi az eddig talált legrövidebb út és hogy melyik csúcsból jött ez (az utolsó előtti csúcs az úton). ∀ iterációban végigmegy ∀ csúcson és megpróbálja javítani. Először a kiindulópont 0, minden más ∞. Az algoritmus leáll, ha egy iterációban nem volt javulás, vagy elérte a $|V(G)|-1$-edik iteráció végét.

XV. tétel:

Floyd algoritmus:

Azt csinálja, mint a Ford, csak ∀ csúcspárra. Nyilvántartja (praktikusan egy mátrixban), hogy honnan hová mi a legrövidebb út és azt a csúcsot ahonnan eljutott oda (út utolsó előtti csúcsa). Kezdetben a mátrixban a közvetlen szomszédok vannak, ill. az átlóban 0 (hiszen önmagától minden pont 0 távolságra van). Minden n. iterációban az n. sor és oszlop segítségével próbálunk javítani az összes többi cellán. Ha egy (j, k) cellában az érték nagyobb, mint ~~(a2)~~ az n. sor, ill. oszlop megfelelő cellájának értéke javítva lesz.
Így megyünk végig ∀ cellán ∀ iterációban, míg végig nem érünk a mátrixon.

Irányított aciklikus gráf definíció:

Egy G gráfot akkor nevezünk irányított aciklikus gráfnak, ha irányított élei vannak és nem tartalmaz kört.

Topologikus sorrend definíció:

Legyen G egy irányított gráf. G topologikus elrendezése a csúcsoknak egy olyan $v_1, v_2, \dots, v_n$ sorrendje, melyben $x \to y \in E$ esetén x előbb van, mint y (azaz ha $x = v_i$, $y = v_j$, akkor $i < j$).

Topologikus elrendezés és nyelő lemma:

Ha G irányított gráf aciklikus, akkor létezik benne nyelő.

Biz.: topologikus sorrendel (...)

Topologikus sorrend és aciklikusság tétel:

Ha egy G irányított gráfnak ∃ topologikus elrendezése, akkor az aciklikus.

Biz.: Dobálom ki a nyelőket. Amiket kidobtam fordítva rendezve (a végén az első kidobott), akkor az egy topologikus elrendezés.

Legrövidebb út keresése aciklikus gráfban algoritmus:

Azért jó, mert nagyon gyors (veri a Dijkstrát és a Fordot is).

Egy topologikus sorrendben végigiterálok az összes csúcson és próbálok javítani. Ennyi. Tényleg.

XVI. tétel:

DFS algoritmus: Számontartja a csúcsok mélységi számát (hányadikként lett begázva), befejezési számát (hányadikként volt a csúcsból visszalépés), ill. a fában őket megelőző csúcsokat. Végigmegy a fán úgy, hogy megy, amilyen mélyre csak tud, majd ha elért valahová, ahonnan nem lehet (vis) továbbmenni, addig lépeget vissza, míg nem tud újra elindulni.

DFS erdő éleinek definíció:

Tegyük fel, hogy az s csúcsból indítva lefuttattuk a DFS-t egy $\vec{G}$ irányított gráfon. A kapott DFS erdő F. $e = (\vec{u}\vec{v}) \in E(\vec{G})$. e:

- fa él, ha $e \in E(F)$
- előrevezető él, ha nem fa él, de F-ben v u leszármazottja
- visszafelé vezető, ha F-ben v őse u-nak
- keresztél, ha u és v között nincs egyenes ági leszármazás

Ha ∄ visszafelé vezető, $\vec{G}$ aciklikus. Topologikus sorrend: befejezési számok fordított sorrendben.

I. tétel:

Faktoriális definíció:

Az $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ szorzatot n faktoriálisának nevezzük. Definíció szerint $0!=1$. Jele $n!$.

Permutáció definíció:

Az n elem összes lehetséges sorrendjének a száma $n!$ és ezt hívjuk permutációnak.

Ismétléses permutáció definíció:

k_1 db első típusú, ..., k_n db n-edik típusú elem lehetséges sorbarendezésének a száma a $k_1+\ldots+k_n$ ismétléses permutációi. Számuk:

$$\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}.$$

Variáció definíció:

n-ből k elem összes lehetséges sorrendben való kiválasztása az n elem k-ad osztályú (ismétlés nélküli) variációja. Számuk:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ismétléses variáció definíció:

n elemből k tagú sorozatok kiválasztása, ahol egy-egy elem többször is szerepelhet az n elem k-ad osztályú ismétléses variációja. Számuk:

$$n^k.$$

Kombináció definíció:

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a száma: n elem k-ad osztályú kombinációja. Számuk:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Az $\binom{n}{k}$ a binomiális együttható.

Ismétléses kombináció definíció:

n elemből k kiválasztása, ha a sorrend nem számít, de az elemek többször is szerepelhetnek: n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációi. Számuk:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Binomiális tétel:

Tetszőleges valós x, y-ra és nemnegatív egész n-re:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + \binom{n}{n}y^n.$$

Pascal háromszög:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\vdots$$

$\forall$ sor összege 2^{i-1}, mivel $\forall$ sor összege 2x-ese az előzőnek.

Binomiális összegtétel:

Minden n nemnegatív számra:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$