ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI β változat

2010. április 15.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (3x)^n}{8^n\ \sqrt{n}}$$

Adja meg a sor konvergencia tartományát és abszolút konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{3}{8}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}}_{a_n}\, x^n \quad ; \quad x_0 = 0$$ (1)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{8}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{3}{8}\,\frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \to \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{3}{8} = \alpha = \frac{1}{R}$$

$\Rightarrow R = \frac{8}{3}$ (4)

$-\frac{8}{3} \quad 0 \quad 8/3$

Végpontok:

$x = -\frac{8}{3}$: $\sum_1^{\infty} \left(-\frac{3}{8}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \left(-\frac{8}{3}\right)^n = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ div.

$(\alpha = \frac{1}{2} \not> 1)$ (2)

$x = \frac{8}{3}$: $\sum_1^{\infty} \left(-\frac{3}{8}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{8}{3}\right)^n = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$ konv. (Leibniz sor),

de nem abs. konv. (2)

K. T. : $\left(-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right]$ (1)

A. K. T. : $\left(-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ (2) (A tanult tétel értelmében a hatványsor $(x_0 - R, x_0 + R)$-ben abs. konv.)

2. feladat (13 pont)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)\, x^{2k-1} \qquad .$$

Írja fel a sor összegfüggvényét és határozza meg a sor konvergenciasugarát!

$f(x) = 3x + 5x^3 + 7x^5 + \ldots \qquad f(0) = 0$

$x \neq 0$: $f_1(x) := x \cdot f(x) = \sum_1^{\infty} (2k+1) x^{2k}$ (2)

$$\int_0^x f_1(t)\, dt = \int_0^x \sum_1^{\infty} (2k+1) t^{2k}\, dt = \sum_1^{\infty} \int_0^x (2k+1)\, t^{2k}\, dt =$$

$[0, x] \subset (-R, R)$

an2z2100415/1.

$$= \sum_{1}^{\infty} (2k+1) \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \Big|_0^x = \sum_{1}^{\infty} x^{2k+1} = \frac{x^3}{1-x^2} \quad (4)$$

$$q = x^2 \Rightarrow \quad R = 1 \quad (2)$$

$$f_1(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f_1(t)\,dt = \frac{d}{dx} \frac{x^3}{1-x^2} = \ldots = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{x} = \frac{3x - x^3}{(1-x^2)^2} \qquad R = 1 \text{ (változatlan)} \quad (2)$$

(A képlet $x=0$-ra is jó.)

3. feladat (12 pont)

Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = e^{-3x}\,, \quad x_0 = 1$

b) $g(x) = x^3\, e^{-3x}\,, \quad x_0 = 0$

$g^{(100)}(0) = ?$

a.) $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots\,; \quad R = \infty \quad (2)$

$$f(x) = e^{-3x} = e^{-3(x-1)-3} = e^{-3}\, e^{-3(x-1)} = \qquad (u = -3(x-1))$$

$$= e^{-3}\left(1 - 3(x-1) + \frac{3^2(x-1)^2}{2!} - \frac{3^3(x-1)^3}{3!} + \ldots\right) \quad (3) \qquad K.T.: (-\infty, \infty) \; (1)$$

b.) $$g(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\Big|_{u=-3x} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} x^{n+3} \quad (2)$$

$$KT: (-\infty, \infty) \quad (1)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad : \quad a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

$$\Rightarrow g^{(k)}(0) = k!\, a_k$$

$$g^{(100)}(0) = 100!\, \underbrace{a_{100}}_{x^{100} \text{ eh-ja } (n=97)} = 100!\, \frac{(-3)^{97}}{97!} \quad (3)$$

4. feladat (16 pont)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9+x^4}}$$

a) Írja fel az $x_0 = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát és adja meg annak konvergenciasugarát! Írja fel a_{12} (x^{12} együtthatója) értékét elemi műveletekkel!

b)
$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Határozza meg az integrál értékét közelítően az integrálandó függvényt negyedfokú Taylor-polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

a.) $\boxed{10}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^4}{9}}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{x^4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$(1+u)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} u^n \quad ; \quad R = 1 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \left(\frac{x^4}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \binom{-1/2}{n} \frac{1}{9^n} x^{4n} \quad (3)$$

$$\left|\frac{x^4}{9}\right| = \frac{|x|^4}{9} < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt[4]{9} = R \quad (2)$$

$$\underbrace{a_{12}}_{x^{12} \text{ együtthatója}} = \frac{1}{3}\binom{-1/2}{3}\frac{1}{9^3} = \frac{1}{3} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} \frac{1}{9^3} \quad (2)$$

b.) $\boxed{6}$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{9}\frac{-1/2}{1} x^4 + \frac{1}{3}\frac{1}{9^2}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2} x^8 + \dots \right) dx =$$

$T_4(x)$

$$= \frac{1}{3}x - \frac{1}{54}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{8\cdot 9^2}\frac{x^9}{9} - \dots \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{270} + \frac{1}{8\cdot 9^3} - \dots \approx$$

Leibniz sor

$$\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{270}$$

$$|H| \leq \frac{1}{8\cdot 9^3}$$

an2z21004151/3.

5. feladat (21 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,(2y+3)}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 3 \ , & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Létezik-e a határértéke f -nek az origóban? Folytonos-e a függvény az origóban?

b) $f'_x(x,y) = ?$ ha $((x,y) \neq (0,0)$

c) $f'_x(0,0) = ?$, $\quad f'_y(0,0) = ?$
(A definícióval dolgozzon!)

d) Totálisan differenciálható-e az f függvény az origóban?

a.) $\boxed{8}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{\varrho_n^2 \cos^2\varphi_n (2\varrho_n \sin\varphi_n + 3)}{\varrho_n^2} =$$

$$= \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underbrace{\frac{\varrho_n^2}{\varrho_n^2}}_{=1} \cos^2\varphi_n (2\overbrace{\underbrace{\varrho_n}_{0} \underbrace{\sin\varphi_n}_{\text{korl.}}}^{\to 0} + 3) = 3\cos^2\varphi_n : \text{függ } \varphi_n\text{-től}$$

$\to 3$

$\Rightarrow \nexists$ a h.é. (6) $\Rightarrow f$ nem folytonos $(0,0)$-ban (2)

b.) $\boxed{4}$ $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f'_x(x,y) = \frac{2x(2y+3)(x^2+y^2) - x^2(2y+3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad (4)$$

c.) $\boxed{7}$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3h^2}{h^2} - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{\underbrace{h}_{\neq 0}} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-3}{k} = \nexists$$

c.) $\boxed{2}$ $f'_y(0,0) \ \nexists \Rightarrow f$ nem deriválható (totálisan) $(0,0)$-ban

an2221004151/4.

6. feladat (17 pont)

$$f(x,y) = \frac{e^{x+2y}}{y^2+1}, \qquad P_0(1,0)$$

a) Hol és miért létezik a gradiens? $\quad \operatorname{grad} f(P_0) = ?$

b) Adja meg $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}$ értékét, ha $\underline{e} \parallel -6\underline{i} + 8\underline{j}$

c) $\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$

a.) $f(x,y) = e^x \, \frac{e^{2y}}{y^2+1}$

$\boxed{9}$

$f_x' = e^x \, \frac{e^{2y}}{y^2+1}$ (2) $\quad f_y' = e^x \, \frac{2e^{2y}(y^2+1) - e^{2y}\cdot 2y}{(y^2+1)^2}$ (3)

f_x', f_y' mindenütt $\exists$ és folytonos $\Rightarrow$ grad f mindenütt $\exists$

(vagy f_x', f_y' $\exists$ és folyt. K_{P_0}-ban $\Rightarrow$ grad $f(P_0)$ $\exists$) (2)

$\operatorname{grad} f(P_0) = f_x'(P_0)\underline{i} + f_y'(P_0)\underline{j} = e\underline{i} + 2e\underline{j}$ (2)

b.) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\cdot \underline{e}$ (2)

$\boxed{5}$

$\underline{v} = -6\underline{i} + 8\underline{j} \Rightarrow |\underline{v}| = \sqrt{(-6)^2+8^2} = 10 \Rightarrow \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = -\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}$ (1)

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = (e\underline{i} + 2e\underline{j})(-\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}) = -\frac{3}{5}e + \frac{8}{5}e = e$ (2)

c.) $\max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)| = \sqrt{e^2+4e^2} = \sqrt{5}\,e$ (3)

$\boxed{3}$

7. feladat (9 pont)

$$g(x,y) = f(2x + 3y^2), \qquad f \in C^2_{\mathbb{R}}$$

$$g_x' = ?, \qquad g_y' = ?$$

$$g_{yy}'' = ?, \qquad g_{yx}'' = ?, \qquad g_{xy}'' = ?$$

$g_x' = f'(2x+3y^2)\cdot 2$ (2)

$g_y' = f'(2x+3y^2)\cdot 6y$ (2)

$g_{yy}'' = (f''(2x+3y^2)\cdot 6y)\cdot 6y + f'(2x+3y^2)\cdot 6$ (2)

$g_{yx}'' = g_{xy}'' = f''(2x+3y^2)\cdot 6y \cdot 2$ (1) (2)

an2z2100415/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott ponthoz tartozó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6}$, $\quad x_0 = 0$ $\qquad$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x - 5}$, $\quad x_0 = 2$

a.) $\boxed{5}$ $f(x) = -\frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}} = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{6^{n+1}}x^{2n}$

$|q| = \frac{|x|^2}{6} < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{6}$ $\quad$ K.T: $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$

b.) $\boxed{6}$ $g(x) = \frac{1}{(x-2)-3} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x-2}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}}(x-2)^n$

$|q| = \left|\frac{x-2}{3}\right| = \frac{|x-2|}{3} < 1 \Rightarrow |x-2| < 3$ $\quad$ K.T.: $(-1, 5)$

9. feladat (9 pont)

$$f(x,y) = 3xy^2 + 4x^4y - 2x + 15, \qquad x_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

Írja fel f grafikonjának az adott ponthoz tartozó érintősíkja egyenletét!

Az érintősík egyenlete:

$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y-y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$ (2)

$f(0,1) = 15$

$f_x' = 3y^2 + 16x^3y - 2$ (2) $\qquad f_x'(0,1) = 1$

$f_y' = 6xy + 4x^4$ (2) $\qquad f_y'(0,1) = 0$

Az érintősík:

$1\cdot(x-0) + \underbrace{0\cdot(y-1)}_{=0} - (z-15) = 0$ (3)

an2z2100415/6.