MEGOLDÁS

ANALÍZIS(2) **I. ZÁRTHELYI pótlása** **2009. március 27.**
Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (14 pont)

Adja meg az

$$y' = \frac{y^3+y}{3y^2+1}\ (x-4)\,e^{-x}$$

differenciálegyenlet $y(0)=3$ valamint az $y(3)=0$ kezdeti értékhez tartozó megoldását! (Implicit alakban kérjük a megoldásokat.)

$y \equiv 0$ megoldás (1)

$y \neq 0$ $\quad \displaystyle\int \frac{3y^2+1}{y^3+y}\,dy = \int (x-4)\,e^{-x}\,dx$ (2)

parc. int.

$\vdots$

$$\ln|y^3+y| = -(x-4)e^{-x} - e^{-x} + C$$

(2) (4) (1)

$y(0)=3$: $\quad \ln 30 = 3 + C \Rightarrow C = \ln 30 - 3$

$\ln(y^3+y) = -(x-4)e^{-x} - e^{-x} + \ln 30 - 3$ (2)

$y(3)=0$: $\quad y \equiv 0$ (2)

2. feladat (15 pont)

$$y' = y^2 + x^2 - 2x$$

a) Rajzolja be a differenciálegyenlethez tartozó iránymező irányát az alábbi pontokban: $P_1(0,1)$, $P_2(1,0)$, $P_3(1,-1)$!

b) Írja fel az izoklinák egyenletét! Rajzolja fel azon izoklinát, melynek pontjaiban a megoldásfüggvénynek lokális szélsőértéke lehet!

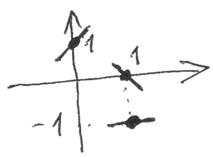
c) Az $y=y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása a fenti differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy a $(2,0)$ ponton.
Van-e ennek a megoldásnak lokális maximuma az $x_0 = 2$ helyen?
Határozza meg ennek a megoldásnak az $x_0=2$ pontbeli harmadik deriváltját!
($y'''(2)=?$)

a.) $\boxed{3}$

$P_1(0,1)$: $\quad y'(0) = 1+0-0 = 1$

$P_2(1,0)$: $\quad y'(1) = 0+1-2 = -1$

$P_3(1,-1)$: $\quad y'(1) = 1+1-2 = 0$

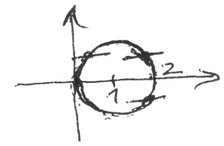


an2z1p090327/1.

b.) Izoklinák: $y^2+x^2-2x=K$ (2)

$\boxed{4}$ Lok. sz. lehet: $K=0$

$y^2+x^2-2x=0 \Rightarrow y^2+(x-1)^2=1$ (2)



c.) $y(2)=0$

$\boxed{8}$ $y'(2)=0+4-4=0$ (1)

$y''=2yy'+2x-2$ (2)

$y''(2)=2>0$ (1) Nincs lok. max. itt. (1)
(Lok. min. van)

$y'''=2y'y'+2yy''+2$ (2) $\qquad y'''(2)=2$ (1)

3. feladat (13 pont)

Határozza meg az

$$y'+y\,\sin x=\sin x\, e^{2\cos x}$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

(H): $y'+y\cdot\sin x=0$ $\qquad y_H=C\cdot\varphi(x)$ alakú, elég egy φ-t keresni

$\int\frac{1}{y}\,dy=-\int\sin x\,dx$

$\ln y=\cos x$

$y=\varphi(x)=e^{\cos x} \Rightarrow y_H=Ce^{\cos x}$ (5) $C\in\mathbb{R}$

$y_{ip}=c(x)e^{\cos x}$

$y'_{ip}=c'e^{\cos x}+c\,e^{\cos x}(-\sin x)$

.... $c'=\sin x\, e^{\cos x} \Rightarrow c=-e^{\cos x}$

$\Rightarrow y_{ip}=-e^{2\cos x}$ (6)

$y_{ia}=y_H+y_{ip}=Ce^{\cos x}-e^{2\cos x}$ (2)

4. feladat (12 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet! $u = y - 3x$ helyettesítéssel dolgozzon!

$$y' = \frac{2y - 6x + 7}{y - 3x + 3}, \qquad y \neq 3x - 3$$

(Implicit alakban kérjük a megoldást.)

$u = y - 3x \Rightarrow y = u + 3x$

$y' = u' + 3$ (2)

Behelyettesítve:

$$u' + 3 = \frac{2u + 7}{u + 3} \quad (2)$$

$$\Rightarrow u' = -\frac{u+2}{u+3}$$

$u \equiv -2$ mo. : $y - 3x = -2$

$\Rightarrow y = 3x - 2$ mo. (2)

$u \neq -2$:

$$\int \underbrace{\frac{u+3}{u+2}}_{1 + \frac{2}{u+2}} du = -\int dx$$

$$u + \ln|u+2| = -x + C$$

(3) (1) (1)

$$y - 3x + \ln|y - 3x + 2| = -x + C \quad (1)$$

5. feladat (16 pont)

a)

$$y'' + y' - 6y = 0$$

Adja meg az általános megoldást!

Adja meg az $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$ feltételeket kielégítő megoldást!

b)

$$y'' + y' - 6y = 6x + 8e^{-2x}, \qquad y(x) = ?$$

a.) $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$

$y_H = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$ (5)

$y(0) = 1$: $C_1 + C_2 = 1$

$y' = -3C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{2x}$

$y'(0) = 7$: $-3C_1 + 2C_2 = 7$

$\Rightarrow C_1 = -1, C_2 = 2$

Így: $y = -e^{-3x} + 2e^{2x}$ (4)

an2z1p090327/3.

b.)

$$\begin{array}{r|l} -6. & y_{ip} = Ax + B + Ce^{-2x} \quad (2) \\ 1. & y'_{ip} = A - 2Ce^{-2x} \\ 1. & y''_{ip} = 4Ce^{-2x} \end{array}$$

$$-6Ax + (-6B+A) + e^{-2x}(-6C-2C+4C) = 6x + 8e^{-2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6A = 6 \\ -6B+A=0 \\ -4C = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -1, \; B = -\frac{1}{6}, \; C = -2$$

$$y_{ip} = -x - \frac{1}{6} - 2e^{-2x} \quad (3)$$

$$y_{id} = y_H + y_{ip} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - x - \frac{1}{6} - 2e^{-2x} \quad (2)$$

6. feladat (10 pont)

Az α paraméter függvényében oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y'' - 6y' + \alpha y = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + \alpha = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4\alpha}}{2} = 3 \pm \sqrt{9-\alpha} \quad (2)$$

Ha $\alpha = 9$: $\lambda_{1,2} = 3$: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ (2)

Ha $\alpha < 9$: 2 különböző valós gyök van

$$y = C_1 e^{(3+\sqrt{9-\alpha})x} + C_2 e^{(3-\sqrt{9-\alpha})x} \quad (3)$$

Ha $\alpha > 9$: konj. komplex gyökpár

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm j\sqrt{\alpha - 9}$$

$$y = C_1 e^{3x} \cos\sqrt{\alpha-9}\,x + C_2 e^{3x} \sin\sqrt{\alpha-9}\,x \quad (3)$$

7. feladat (10 pont)

$$f(n) = \frac{3}{2} f(n-1) + f(n-2)$$

a) Írja fel a rekurzió általános megoldását!

b) Írja fel az összes $f(n) = O(1)$ tulajdonságú megoldást!

a.) $q^n = \frac{3}{2} q^{n-1} + q^{n-2}$ (2) $\quad | : q^{n-2} \neq 0$

$q^2 = \frac{3}{2} q + 1 \Rightarrow q^2 - \frac{3}{2} q - 1 = 0 \Rightarrow q_1 = 2, \; q_2 = -\frac{1}{2}$ (3)

$f(n) = C_1 2^n + C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (2) $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b.) $f(n) = O(1)$ jelentése : $f(n)$ korlátos

$\Rightarrow C_1 = 0, \quad C_2 \in \mathbb{R}$

$f(n) = C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad C_2 \in \mathbb{R}$ (3)

8. feladat (10 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó gyökkritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n^2+2n} \cdot \frac{3^{n+2}}{10^n}$$

a.) $a_n > 0$ és $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = c$

Ha $c < 1$: $\sum^{\infty} a_n$ konv.

Ha $c > 1$ vagy $c = \infty$: $\sum a_n$ div. (2)

(Ha $c = 1$: ?)

b.) $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} \frac{3 \sqrt[n]{9}}{10}$ (3) $= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}}_{e} \frac{3 \sqrt[n]{9}}{10} \to \frac{e \cdot 3 \cdot 1}{10} < 1$ (3) (1)

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv. (1)

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (12 pont)

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet összes megoldását!

$$y' - 3x^2 y = 6x^2$$

(Az explicit alakot adja meg!)

an2z1p 090327/5.

$y' = 3x^2(y+2)$

$y \equiv -2$ mo.

$y \neq -2$: $\quad \int \frac{1}{y+2}\,dy = \int 3x^2\,dx$

$\ln|y+2| = x^3 + c_1 \Rightarrow |y+2| = e^{c_1}e^{x^3} \Rightarrow y+2 = \pm e^{c_1}e^{x^3}$

Tehát

$$\left.\begin{array}{l} y = -2 \pm e^{c_1}e^{x^3} \\ \text{ill. } y \equiv -2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2 + ce^{x^3};\quad c \in \mathbb{R}$$

Lineáris elsőrendűként is megoldható.

10. feladat (8 pont)

Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\ 3^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\ 3^{2n+2}(2n)!}{(2n+2)!\ n!\ 3^{2n}} = \frac{(n+1)\cdot 9}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{9}{2\cdot(2n+1)} \to 0 < 1$$

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv.

an2z1p09032716.