1. feladat (18 pont)
Adja meg az alábbi egyenlet azon megoldásait algebrai alakban, amelyeknek valós része negatív, képzetes része pozitív!

$$z^6 - 26z^3 - 27 = 0$$

Mo. $z^3 = 27 = 27(\cos 0 + i \sin 0)$ vagy $z^3 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$ **(6p)** . Az első egyenlet megoldásai közül a $3(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ felel meg a feltételeknek **(7p)** , a második egyenlet megoldásai közül pedig egyik sem **(5p)** .

---

2. feladat (5+10=15 pont)
a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ definícióját!
b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 2n^2}{n^2 + n + 1} = \infty$!

Mo. *a*) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ha minden $P > 0$ számhoz létezik $N(P) \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N(P)$ esetén $a_n > P$. **(5p)**
b) Legyen $P > 0$. Ekkor $\dfrac{n^3 - 2n^2}{n^2 + n + 1} > P$ teljesül, ha ha $n \geq 4$ és

$$\frac{n^3 - 2n^2}{n^2 + n + 1} \geq \frac{n^3 - \frac{n^3}{2}}{n^2 + n^2 + n^2} = \frac{n}{6} > P, \qquad \textbf{(5p)}$$

vagyis ha $n > 6P$ **(3p)** , így $N(P) = \max(4, 6P)$ **(2p)**

---

3. feladat (9+9+9=27 pont)
Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+5}\right)^{n^3}, \qquad b_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+5}\right)^{n^2}, \qquad c_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+5}\right)^{n}$$

Mo.

$$b_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+5}\right)^{n^2} \overset{\textbf{(5p)}}{=} \frac{\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{n^2}} \overset{\textbf{(3p)}}{\to} \frac{e^2}{e^5} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{1}{e^3}.$$

$a_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} b_n^n$, tehát mivel tetszőleges $1-\frac{1}{e^3} > \varepsilon > 0$ **(3p)** esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N$ esetén

$$0 < a_n < \left(\frac{1}{e^3} + \varepsilon\right)^n \to 0 \qquad (\mathbf{3p})$$

így a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ **(1p)** .
$c_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \sqrt[n]{b_n}$, tehát mivel tetszőleges $\frac{1}{e^3} > \varepsilon > 0$ **(3p)** esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N$ esetén

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{e^3} - \varepsilon} < c_n < 1 \qquad (\mathbf{3p})$$

így a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$ **(1p)** .

---

4. feladat (20 pont)
Konvergens-e az $a_1 = 7$, $a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$ rekurzióval megadott sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

Mo. $a_1 = 7 > a_2 = \sqrt{35}$, és ha $a_n > a_{n+1}$, akkor $5a_n > 5a_{n+1}$ tehát $a_{n+1} = \sqrt{5a_n} > \sqrt{5a_{n+1}} = a_{n+2}$, vagyis a sorozat monoton csökken **(5p)** . A sorozat nemnegatív, tehát alulról korlátos, így konvergens **(3p)** . A lehetséges A határérték kielégíti az $A = \sqrt{5A}$ egyenletet **(2p)** , vagyis $A = 0$ vagy $A = 5$ **(2p)** . Belátjuk, hogy $a_n > 5$. **(2p)** $a_1 > 5$, és ha $a_n > 5$, akkor $5a_n > 25$, így $a_{n+1} = \sqrt{5a_n} = 5$. **(4p)** A sorozat határértéke így csak 5 lehet. **(2p)**

---

5. feladat (20 pont)
Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \frac{(-n)^n + 7^n}{n! + n^7}, \qquad b_n = \frac{n! + n^7}{(-n)^n + 7^n}$$

Mo.

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{1 + \left(\frac{7}{n}\right)^n}{1 + \frac{n^7}{n!}} \to \infty, & \text{ha } n \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{-1 + \left(\frac{7}{n}\right)^n}{1 + \frac{n^7}{n!}} \to -\infty, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad (\mathbf{6p})$$

A sorozat torlódási pontjainak halmaza $\{-\infty, \infty\}$ **(1p)** , vagyis $\limsup a_n = \infty$, **(1p)** $\liminf a_n = -\infty$ **(1p)** , így a sorozat nem konvergens **(1p)** .

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1 + \frac{n^7}{n!}}{1 + \left(\frac{7}{n}\right)^n} \to 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1 + \frac{n^7}{n!}}{-1 + \left(\frac{7}{n}\right)^n} \to 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad (\mathbf{6p})$$

A sorozat egyetlen torlódási pontja a 0 **(1p)** , vagyis $\limsup b_n = \liminf b_n = 0 = \lim b_n$ **(3p)** .

IMSC feladat (1+3+4=8 IMSC pont)
a) Írja föl a komplex számsíkon azt az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzformációt, ami a valós tengelyre tükröz!
b) Írja föl a komplex számsíkon azt a $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzformációt, ami az $y = x$ egyenletű, 45°-os egyenesre tükröz!
c) Írja fel a legegyszerűbb alakban a fenti két transzformáció $g \circ f$ kompozícióját! Mi ennek a geometriai jelentése?

Mo. *a*) $f(z) = \overline{z}$, **(1p)**

b) $g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}\overline{e^{-i\frac{\pi}{4}}z} = i\overline{z}$, **(3p)**

c) $(g \circ f)(z) = iz$, origó körüli 90°-os forgatás. **(4p)**
