ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI β **változat**

2010. okt. 14.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

a) Adja meg a következő fogalmak definícióját!

$\lim_{n\to\infty} a_n = -7$, illetve $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

b) A megfelelő definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{7n^3 - 2n^2 + 3n + 1} = \infty$$

a.) (D) $\lim_{n\to\infty} a_n = -7$:

$\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ N(\varepsilon)$ $(\varepsilon \in \mathbb{R},\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N})$, hogy

$|a_n + 7| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ (3)

(D) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$:

$\forall\ P > 0$-hoz $\exists\ N(P)$: $(P \in \mathbb{R},\ N(P) \in \mathbb{N})$, hogy

$a_n > P$, ha $n > N(P)$ (2)

b.) $a_n = \sqrt[3]{7n^3 - 2n^2 + 3n + 1} > \sqrt[3]{7n^3 - 2n^3 + 0 + 0} = \sqrt[3]{5} \cdot n > P$

$\Rightarrow n > \frac{P}{\sqrt[3]{5}} \Rightarrow N(P) = \left[\frac{P}{\sqrt[3]{5}}\right]$ (5)

2. feladat (22 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat!

a) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{4n^2 + 3}{n^2 + 4}}$

b) $b_n = \sqrt[n]{2^{2n+3} \cdot \left(\dfrac{n+1}{n-4}\right)^{2n^2}}$

c) $c_n = \dfrac{3^n + n^2\ 2^n}{2^{3n+1} + 5}$

$\boxed{8}$ a.) $\underset{\swarrow\ 1}{\sqrt[n]{\tfrac{3}{5}}}\ \dfrac{1}{\underset{\swarrow\ 1}{(\sqrt[n]{n})^2}} = \sqrt[n]{\dfrac{3}{n^2 + 4n^2}} \le \sqrt[n]{\dfrac{4n^2 + 3}{n^2 + 4}} \le \sqrt[n]{\dfrac{4n^2 + 3n^2}{4}} = \underset{\swarrow\ 1}{\sqrt[n]{\tfrac{7}{4}}}\ \underset{\swarrow\ 1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$

$1 \leftarrow$

$\underset{\text{rendőrelv}}{\Rightarrow} a_n \to 1$

Felhasználtuk, hogy

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$ $(p \in \mathbb{R},\ p > 0)$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

an1z1101014/1.

Vagy: $\alpha_n := \dfrac{4n^2+3}{n^2+4} = \dfrac{4+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} \to 4$

$\Rightarrow \quad 3 < \alpha_n < 5$, ha $n > N_1$ $(\exists N_1)$

$\Rightarrow \quad \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\to 1} < a_n = \sqrt[n]{\alpha_n} < \underbrace{\sqrt[n]{5}}_{\to 1}$, ha $n > N_1$

$\Rightarrow \quad a_n \to 1$

b.) $\boxed{8}$

$$b_n = \sqrt[n]{\underbrace{2^{2n}}_{=4^n} \cdot \underbrace{2^3}_{=8} \left(\frac{n+1}{n-4}\right)^{2n^2}} = 4 \cdot \sqrt[n]{8} \left(\frac{n+1}{n-4}\right)^{2n} =$$

$$= 4 \cdot \sqrt[n]{8} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-4}{n}\right)^n}\right)^2 \longrightarrow 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{e}{e^{-4}}\right)^2 = 4 \cdot e^{10}$$

Ugyanis: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

c.) $\boxed{6}$

$$c_n = \frac{3^n + n^2 \cdot 2^n}{2 \cdot 8^n + 5} = \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^n + n^2\left(\frac{2}{8}\right)^n}{2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n} \to \frac{0+0}{2+0} = 0$$

Felhasználtuk, hogy

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, ha $|a| < 1$

és $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0$, ha $|a| < 1$, $k \in \mathbb{N}^+$

3. feladat (16 pont)

$$a_{n+1} = 10 - \frac{16}{a_n}, \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad \text{és} \quad a_1 = 5$$

$$(a_n) = (5\,,\ 6.8\,,\ 7.65\,, \cdots)$$

a) Bizonyítsa be, hogy $2 < a_n < 8$!

b) Igazolja, hogy a sorozat monoton!

c) Konvergens-e ez a sorozat? (A felhasznált tételt írja le!)
Ha igen, mi a határértéke?

a.) $\boxed{5}$ Teljes indukcióval:

1.) $2 < a_i < 8$ $\quad i = 1, 2, 3$ teljesül

2.) Tegyük fel, hogy
$2 < a_n < 8$

3.) Igaz-e? $\quad 2 \overset{?}{<} a_{n+1} = 10 - \frac{16}{a_n} \overset{?}{<} 8$

2.) miatt igaz, hogy

$0 < 2 < a_n < 8 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{a_n} > \frac{1}{8} \qquad | \cdot (-16) < 0$

$\Rightarrow \quad -8 < -\frac{16}{a_n} < -2 \qquad | + 10$

$\Rightarrow \quad 2 < \underbrace{10 - \frac{16}{a_n}}_{a_{n+1}} < 8$

Tehát igaz az állítás.

an1z1101014/2.

b.) Sejtés: (a_n) monoton nő

$\boxed{5}$ Bizonyítás: teljes indukcióval

1.) $a_1 \le a_2 \le a_3$ teljesül

2.) Tegyük fel, hogy

$$a_{n-1} \le a_n$$

3.) Igaz-e?

$$10-\frac{16}{a_{n-1}} = a_n \stackrel{?}{\le} a_{n+1} = 10-\frac{16}{a_n}$$

2. miatt: $\underbrace{2 < a_{n-1}}_{a.)\text{ miatt}} \le a_n$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n-1}} \ge \frac{1}{a_n} \quad \Big| \cdot(-16)<0 \quad \Rightarrow -\frac{16}{a_{n-1}} \le -\frac{16}{a_n} \quad \Big| +10$$

$$\Rightarrow \quad a_n = 10-\frac{16}{a_{n-1}} \le 10-\frac{16}{a_n} = a_{n+1}$$

Tehát a sorozat monoton nő.

c.) Mivel a sorozat monoton és korlátos, ezért konvergens. 2

$\boxed{6}$ A határérték kielégíti a rekurzió egyenletet:

$$A = 10-\frac{16}{A} \Rightarrow A^2-10A+16=0 \Rightarrow A = \begin{cases} 2 \\ 8 \end{cases} \quad 2$$

Mivel $a_1 = 5$ és $a_n \nearrow \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 8$ 2

4. feladat (16 pont)

Határozza meg az alábbi sorozatok limesz szuperiorját és a limesz inferiorját:

$$a_n = \frac{n^2\left(1-\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2n^2-8n+6}, \qquad b_n = \sqrt{4n^2+3n} + (-1)^n\sqrt{4n^2+8n+7}$$

(a_n):

$$\sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 1, & \text{ha } n=4k+1 \\ 0, & \text{ha } n=2k \\ -1, & \text{ha } n=4k+3 \end{cases}$$

Ha $n=4k+1$: $a_n = 0 \to 0$ 1

Ha $n=2k$: $a_n = \frac{n^2}{2n^2-8n+6} = \frac{1}{2-\frac{8}{n}+\frac{6}{n^2}} \to \frac{1}{2}$ 2

Ha $n=4k+3$: $a_n = \frac{n^2\cdot 2}{2n^2-8n+6} = \frac{2}{2-\frac{8}{n}+\frac{6}{n^2}} \to \frac{2}{2} = 1$ 2

$S = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$\overline{\lim}\, a_n = 1$ 1 $\qquad \underline{\lim}\, a_n = 0$ 1

an1z1101014/3.

$(-n)$.

Ha n páros: $b_n = \sqrt{4n^2+3n} + \sqrt{4n^2+8n+7} \to \infty$ (2)

Ha n páratlan:

$$b_n = \left(\sqrt{4n^2+3n} - \sqrt{4n^2+8n+7}\right) \frac{\sqrt{4n^2+3n} + \sqrt{4n^2+8n+7}}{\sqrt{4n^2+3n} + \sqrt{4n^2+8n+7}} = \quad (2)$$

$$= \frac{4n^2+3n-(4n^2+8n+7)}{\sqrt{4n^2+3n} + \sqrt{4n^2+8n+7}} = \frac{-5n-7}{\sqrt{4n^2+3n} + \sqrt{4n^2+8n+7}} = \quad (1)$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \frac{-5-\frac{7}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}} + \sqrt{4+\frac{8}{n}+\frac{7}{n^2}}} \longrightarrow \frac{-5}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = -\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\underline{\lim}\, b_n = -\frac{5}{4} \ (1), \quad \overline{\lim}\, b_n = \infty \ (1)$$

5. feladat (18 pont)

a) Mit nevezünk Leibniz-sornak? Milyen tételt tanultunk Leibniz-sorokkal kapcsolatban?

b) Konvergensek-e az alábbi sorok?

*b*1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+3}{n^2}$, *b*2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{(n+2)^2}$, *b*3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{(n+2)^3}$.

a.) $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots$; $c_n > 0$

$\boxed{4}$ Ha a váltakozó előjelű sornál (c_n) monoton csökkenően tart nullához, akkor Leibniz sornak hívjuk. (2)

A Leibniz sor mindig konvergens. (2)

(Leibniz sornál: $s \approx s_n$ $|H| \leq c_{n+1}$)

b1.) Váltakozó előjelű és $c_n = \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} \searrow 0$

$\boxed{4}$ teljesül, így Leibniz típusú sor. Tehát konvergens

b2.) $a_n := \dfrac{5n+3}{(n+2)^2}$

$\boxed{5}$

$$a_n > \frac{5n+0}{(n+2n)^2} = \frac{5}{9}\frac{1}{n}\ ;\ \frac{5}{9}\sum^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div.} \underset{\text{min kr.}}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ div.}$$

b3.) $b_n := \dfrac{5n+3}{(n+2)^3}$

$\boxed{5}$

$$0 < b_n < \frac{5n+3n}{(n+0)^3} = 8 \cdot \frac{1}{n^2}\ ;\ 8\sum^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konv. } (\alpha = 2 > 1)$$

$$\underset{\text{maj. kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} b_n \text{ konv.}$$

an1z1110101 4/4.

6. feladat (18 pont)

Mutassa meg, hogy az alábbi sor konvergens!

Adja meg a sor összegét, ha tudja! Ha nem tudja megadni a sor összegét, akkor adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+3}+6^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}+3^n}{6^n}$

a.) $\boxed{10}$ $0 < a_n = \frac{3^n}{8 \cdot 2^n + 6^n} < \frac{3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\sum^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konv. geom. sor $\left(-1 < q = \frac{1}{2} < 1\right)$

$\xRightarrow{\text{maj.kr.}} \sum^{\infty} a_n$ konv. (5)

$s \approx s_{100}$:

$H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{3^n}{8 \cdot 2^n + 6^n} < \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{101}}{1 - \frac{1}{2}}$ (5)

b.) $\boxed{8}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot 2^n + 3^n}{6^n}$ két konvergens geometriai sor összege, így konvergens.

$s = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{6}\right)^n}_{=\left(\frac{1}{3}\right)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{3}{6}\right)^n}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 8 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$

(4) (4)

Pótfeladatok (csak a 40 pont eléréséig javítjuk ki):

7. feladat (10 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi számsorozatokat!

a) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n+6}\right)^{5n}$ b) $b_n = \dfrac{3^{n-1} + 2^{2n}}{4^{n+1} + 5}$

a.) $\boxed{5}$ $a_n = \left(\dfrac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{6}{n}\right)^n}\right)^5 \longrightarrow \left(\dfrac{e^2}{e^6}\right)^5 = \left(e^{-4}\right)^5 = e^{-20}$

Vagy $a_n = \dfrac{\left(1+\frac{2\cdot 5}{n\cdot 5}\right)^{5n}}{\left(1+\frac{6\cdot 5}{n\cdot 5}\right)^{5n}} \longrightarrow \dfrac{e^{10}}{e^{30}} = e^{-20}$

b.) $\boxed{5}$ $b_n = \dfrac{\frac{1}{3}3^n + 4^n}{4\cdot 4^n + 5} = \underbrace{\dfrac{4^n}{4^n}}_{=1} \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{4 + 5\left(\frac{1}{4}\right)^n} \longrightarrow \dfrac{0+1}{4+0} = \dfrac{1}{4}$

8. feladat (10 pont)

Abszolút konvergens-e, feltételesen konvergens-e vagy divergens-e az alábbi sor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}+5}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^3 - 3n - 7}{5n^6 - n^5 + 3n^2}$

a.) $\sum^{\infty} a_n$

$\boxed{4}$ $|a_n| = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}+5} \longrightarrow \dfrac{1}{1+5} = \dfrac{1}{6} \neq 0 \Rightarrow a_n \not\to 0$

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele

b.) $\sum^{\infty} b_n$

$\boxed{6}$ $|b_n| = \dfrac{2n^3 - 3n - 7}{5n^6 - n^5 + 3n^2} \leq \dfrac{2n^3 - 0 - 0}{5n^6 - n^6 + 0} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^3}$

$\dfrac{1}{2}\sum^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ konv. $(\alpha = 3 > 1) \underset{\text{maj.kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty}|b_n|$ konv.

Tehát a sor abszolút konvergens.

an1z1101014/6.