Villamosmérnök A1X (2014 ősz) Pót ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát 2×30 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. zh pótlása

1. Milyen relációban állnak az A és B halmazok, ha
(a) $A \cup B \subseteq A \cap B$ (b) $A \cap C = B \cap C$ és $A \cap \bar{C} = B \cap \bar{C}$

Megoldás. (a) $A \subseteq A \cup B \subseteq A \cap B \subseteq B$, és a szimmetria miatt $B \subseteq A$. Tehát $A = B$.
(b) $A = A \cap (C \cup \bar{C}) = (A \cap C) \cup (A \cap \bar{C}) = (B \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) = B \cap (C \cup \bar{C}) = B$.

2. Határozza meg a $P = (7, -1, 11)$ pontnak az $S : 2x + y + 3z = 4$ síkra vetett merőleges vetületét!

Megoldás. A keresett pont a sík, és a rá merőleges, P-re illeszkedő egyenes: $e : \begin{cases} x &= 7 + 2t \\ y &= -1 + t \\ z &= 11 + 3t \end{cases}$

metszéspontja: $e(-3) = (1, -4, 2)$.

3. Oldja meg a $\dfrac{|z|}{\bar{z}} = 1 + z$ egyenletet a komplex számok körében!

Megoldás. $z \neq 0$; $\bar{z} = |z|(1 - |z|) \in \mathbb{R}$, tehát $\bar{z} = z \in \mathbb{R}$. Utóbbiból, ha $z \geq 0$, akkor $0 = -z$, ami ellentmondás, ha pedig $z < 0$, akkor $z = -2$. Vagyis $z = -2$ az egyetlen megoldás.

2. zh pótlása

4. (a) $\lim_{n\to\infty} n - \sqrt{n^2 - n}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{(n+1)^2}$

Megoldás. (a) $n - \sqrt{n^2 - n} = \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-1/n}} \to \frac{1}{2}$
(b) $\frac{2^{2n}}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n/2^n+1/2^n)^2} \to \infty$ mert $n \lhd 2^n$ ($n = o(2^n)$).

5. (a) $\lim_{x\to\infty} \cos x$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin 2x}$

Megoldás. (a) Legyen $x_n = 2\pi n$ és $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; akkor $x_n, y_n \to \infty$ és $\cos x_n = 1 \to 1$, $\cos y_n = 0 \to 0$, tehát $\nexists \lim_{x\to\infty} \cos x$.
(b) $\lim_{n\to 0} \frac{x^2}{\sin 2x} = \lim_{n\to 0} \frac{1}{2} x \frac{2x}{\sin 2x} = 0 \cdot 1 = 0$.

6. Hol folytonos, és ahol nem, ott milyen szakadása van az $f(x) = e^{\frac{1}{x^3 - x^2}}$ függvénynek?

Megoldás. A belső függvény nevezőjének nullahelyei (0 és 1) kivételével mindenütt folytonos, mert folytonos függvényekből van összetéve folytonosságot megőrző módon. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ és $\lim_{x\to 1+} f(x) = \infty$, tehát megszüntethető szakadása van 0-ban és másodfajú szakadása van 1-ben.