I. ZÁRTHELYI pótlása, javítása

---

1. feladat (10 pont)

Határozza meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \frac{(y+2)^3}{4+x^2}$$

(Elég az implicit alak.)

$y \equiv -2$ megoldás (2)

Ha $y \not\equiv -2$:

$$\int \frac{1}{(y+2)^3}\,dy = \int \frac{1}{4+x^2}\,dx \quad (3)$$

$$\int (y+2)^{-3}\,dy = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$$

$$\frac{(y+2)^{-2}}{-2}_{(2)} = \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}_{(2)} + C \quad (1)$$

2. feladat (13 pont)

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' + \frac{2}{x}\,y = 6x^3$$

(H) $\quad y' + \frac{2}{x}y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{2}{x}y$

$y_H = C\cdot\varphi(x)$ alakú

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -2\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln y = -2\ln x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$$

$y_H = \frac{C}{x^2}$ (5) $\quad C \in \mathbb{R}$

$y_{ip} = \frac{c(x)}{x^2}$ (2)

$$y'_{ip} = \frac{c'\cdot x^2 - c\cdot 2x}{x^4} = \frac{c'}{x^2} - \frac{2c}{x^3}$$

$$\frac{c'}{x^2} - \frac{2c}{x^3} + \frac{2}{x}\frac{c}{x^2} = 6x^3 \Rightarrow c' = 6x^5 \Rightarrow c(x) = x^6$$

$$y_{ip} = \frac{x^6}{x^2} = x^4 \qquad (4)$$

$$y_{iá} = y_H + y_{ip} \;(2)\; = \frac{C}{x^2} + x^4, \qquad C \in \mathbb{R}$$

3. feladat (17 pont)

Vezesse be az $u = \dfrac{y}{x}$ új változót az alábbi differenciálegyenletbe, majd oldja meg a differenciálegyenletet!

$$x^2 y' + x y = x^2 + y^2, \qquad x > 0$$

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u \cdot 1 \qquad (3)$$

$y' = -\frac{y}{x} + 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ -be behelyettesítve:

$$u'x + u = -u + 1 + u^2 \Rightarrow u' = \frac{1}{x}(u-1)^2 \qquad (4)$$

$u \equiv 1$ megoldás, tehát $y = x$ $(x > 0)$ megoldás (3)

Ha $u \neq 1$:

$$\int \frac{1}{(u-1)^2}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx \qquad (2)$$

$$\frac{(u-1)^{-1}}{-1} = \ln x + C_1 \qquad C_1 \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

$$\frac{1}{u-1} = -\ln x + C_2 \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{\frac{y}{x} - 1} = -\ln x + C_2 \qquad (1)$$

$$y = x\left(1 + \frac{1}{-\ln x + C_2}\right)$$

4. feladat (3+7+6=16 pont)

$$y' = x^2 - 4x + y^2 - 2y + 3$$

(Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet!)

a) Írja fel a differenciálegyenlet izoklináinak egyenletét!

b) Rajzolja fel azon izoklinákat, melynek pontjaiban a vonalelemek hajlásszöge $\frac{\pi}{4}$, illetve $-\frac{\pi}{4}$! Rajzoljon be néhány vonalelemet!

c) Van-e lokális szélsőértéke a $P_0(1,0)$ ponton áthaladó megoldásnak a P_0 pontban? Ha igen, milyen jellegű?

a.) $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 3 = C$: izoklinák egyenlete (3)

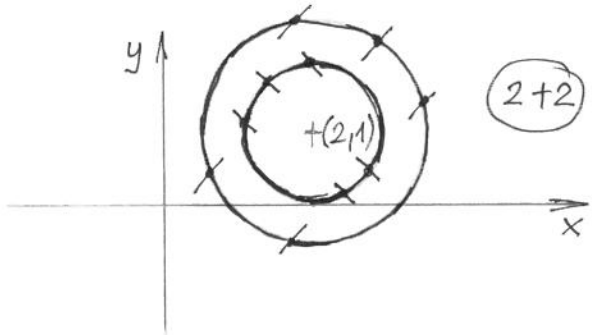
b.) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = C + 2$ körök (3)

$\frac{\pi}{4}$ hajlásszög : $C = 1$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{3})^2$

$-\frac{\pi}{4}$ hajlásszög: $C = -1$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1^2$



(2+2)

c.) $y(1) = 0$

$y'(1) = 1 - 4 - 0 + 3 = 0$ (1): lok. szélsőérték lehet

$y'' = 2x - 4 + 2yy' - 2y'$ (3)

$y''(1) = -2$ (1)

$y'(1) = 0$, $y''(1) < 0$: lokális maximum van a P_0 pontban

5. feladat (20 pont)

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y''' - 6\,y'' + 25\,y' = 5$$

b) Írjon fel egy olyan legalacsonyabb rendű, homogén lineáris differenciálegyenletet, amelynek egy megoldása:

$$y = 5x^2 + 4\,x\,e^{3x}$$

a.) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 25\lambda = \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 25) = 0$ (2)

$\boxed{14}$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = 3 \pm j4$ (3)

an2z1p 100401/3.

$$y_H = C_1 + C_2 e^{3x}\cos 4x + C_3 e^{3x}\sin 4x \quad (3) \qquad C_i \in \mathbb{R}$$

$y_{ip} = Ax$ (külső rezonancia) (2)

$y_{ip}' = A$

$$25A = 5 \Rightarrow A = \frac{1}{5} \quad : \quad y_{ip} = \frac{1}{5}x \quad (2)$$

$$y_{id} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2 e^{3x}\cos 4x + C_3 e^{3x}\sin 4x + \frac{1}{5}x$$

(2)

b.)

$\boxed{6}$

x^2 miatt : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

xe^{3x} miatt : $\lambda_4 = \lambda_5 = 3$

$$\lambda^3(\lambda-3)^2 = \lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0$$

$$y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$$

6. feladat (14 pont)

Konvergens-e az alábbi sor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!\,(5n+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}\,n^5}{3^{2n+1}}$

a.)

$\boxed{7}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}\,(n+1)!\,(5n+1)}{(n+2)!\,(5n+6)\cdot 4^n} = \underbrace{\frac{4}{n+2}}_{\to 0}\ \underbrace{\frac{5n+1}{5n+6}}_{\frac{5+\frac{1}{n}}{5+\frac{6}{n}} \to 1} \to 0 < 1$$

$\xRightarrow{\text{hány. kr.}} \sum^{\infty} a_n$ konv.

b.)

$\boxed{7}$

$$b_n = \frac{8^n \cdot n^5}{3\cdot 9^n}$$

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{8\cdot(\sqrt[n]{n})^5}{\sqrt[n]{3}\cdot 9} \to \frac{8\cdot 1^5}{1\cdot 9} = \frac{8}{9} < 1$$

$\xRightarrow{\text{gyökkrit.}} \sum^{\infty} b_n$ konv.

7. feladat (10 pont)

a) Írja föl az

$$f(n) = 3f(n-1) + 10f(n-2)$$

rekurzió általános megoldását!

b) Adja meg azt a megoldást, melyre $f(0) = 4$, és $f(1) = -1$.

a.) $f(n) = q^n$ alakban keressük a megoldást ($q \neq 0$):

$\boxed{7}$

$$q^n = 3q^{n-1} + 10q^{n-2} \qquad | : q^{n-2} \neq 0$$

$$q^2 = 3q + 10$$

$$q^2 - 3q - 10 = 0 \implies q_1 = -2,\ q_2 = 5$$

$$f(n) = C_1(-2)^n + C_2\, 5^n$$

b.) $\boxed{3}$

$$\left.\begin{array}{lll} f(0)=4 & : & C_1 + C_2 = 4 \\ f(1)=-1 & : & -2C_1 + 5C_2 = -1 \end{array}\right\} \implies C_1 = 3,\ C_2 = 1$$

$$f(n) = 3\cdot(-2)^n + 1\cdot 5^n$$

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (8 pont)

Adja meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \frac{x\ e^{2x^2}}{3y^2+1}$$

(Elég az implicit alak.)

$$\int (3y^2+1)\, dy = \underbrace{\int x e^{2x^2} dx}_{\frac{1}{4}\int 4x e^{2x^2} dx} \qquad 3$$

$$y^3 + y = \frac{1}{4} e^{2x^2} + C$$

2 2 1

an2z1p100401/5.

9. feladat (12 pont)

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 6y' + 9y = 27x^2$$

(H): $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$y_H = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ 5

(I):
$$\begin{array}{r|l} 9. & y_{ip} = Ax^2 + Bx + C \quad 2 \\ -6. & y_{ip}' = 2Ax + B \\ 1. & y_{ip}'' = 2A \end{array}$$

$x^2(9A) + x(9B - 12A) + (9C - 6B + 2A) = 27x^2$

$9A = 27 \implies A = 3$

$9B - 12A = 0 \implies B = 4$

$9C - 6B + 2A = 0 \implies C = 2$

$y_{ip} = 3x^2 + 4x + 2$ 3

$y_{id} = y_H + y_{ip} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + 3x^2 + 4x + 2$

2