ANALÍZIS(2) Mérnök Informatikus szak — I. ZÁRTHELYI — β változat — 2009. március 16. Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (14 pont)

Belátható, hogy az

$$y' = y^6 - x + 1$$

differenciálegyenletnek minden $y(x_0) = y_0$ kezdeti értékhez létezik akárhányszor differenciálható megoldása!

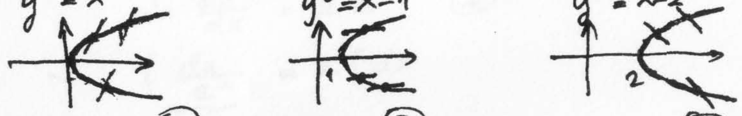
a) Írja fel az izoklinák egyenletét!
Rajzolja fel ennek a differenciálegyenletnek 3 különböző izoklináját és jelölje be a vonalelemeket ezen izoklinák néhány pontjában!

b) Mutassa meg, hogy az $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ ponton áthaladó megoldásnak van lokális szélsőértéke ebben a pontban! Milyen jellegű?

a.) Izoklinák: $y^6 - x + 1 = K$ (2) $\Longrightarrow$ $y^6 = x - 1 + K$ $\boxed{8}$

$K := +1$ $K := 0$ $K := -1$

$y^6 = x$ $y^6 = x - 1$ $y^6 = x - 2$



(2)   (2)   (2)

b.) $\boxed{6}$

$y(2) = -1$

$y'(2) = y^6 - x + 1 \Big|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = 0$ (2)

$y'' = 6y^5 y' - 1$

$y''(2) = -1$ (3)

$y'(2) = 0, \; y''(2) < 0 \Rightarrow x = 2$-ben lok. max van (1)

2. feladat (13 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{3}{x} y = \frac{x^4}{x^2+2}, \qquad x \neq 0$$

(H): $y_H = C \cdot \varphi(x)$ alakú

$y' - \frac{3}{x} y = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} y$

$\int \frac{dy}{y} = 3 \int \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow \ln y = 3 \ln x \Rightarrow \ln y = \ln x^3$

$\Rightarrow y = x^3 = \varphi(x)$, tehát $y_H = C x^3$, $C \in \mathbb{R}$ (5)

$y_{ip} = c(x) \cdot x^3$

$y_{ip}' = c' \cdot x^3 + c \cdot 3x^2$

$c' x^3 + \cancel{c \cdot 3x^2} - \cancel{\frac{3}{x} \cdot c x^3} = \frac{x^4}{x^2+2} \Rightarrow c' = \frac{x}{x^2+2}$

$c = \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{2x}{x^2+2}}_{f'/f} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2)$

$y_{ip} = \frac{1}{2} \ln(x^2+2) \cdot x^3$ (6)

$y_{cá} = y_H + y_{ip} = C x^3 + \frac{x^3}{2} \ln(x^2+2)$ (2)

3. feladat (17 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{y^2 - 9}{x^2 + 5}$$

Adja meg az $y(0) = -1$ és $y(0) = -3$ kezdeti érték problémák megoldását!

$y \equiv 3$, ill. $y \equiv -3$ megoldás (2)

$|y| \neq 3$: $\int \frac{1}{y^2 - 9}\, dy = \int \frac{1}{x^2+5}\, dx$ (2)

$\frac{1}{(y+3)(y-3)} = \frac{A}{y+3} + \frac{B}{y-3} \Rightarrow 1 = A(y-3) + B(y+3)$

$y = 3$: $1 = 6B \Rightarrow B = \frac{1}{6}$

$y = -3$: $1 = -6A \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$

és $\int \frac{1}{x^2+5}\, dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\, dx$

$\frac{1}{6}\left(\ln|y-3| - \ln|y+3|\right) = \frac{1}{5} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} + C$

(5)   (3)   (1)

$y(0)=-1$:

$\frac{1}{6}(\ln 4 - \ln 2) = 0 + C \Rightarrow C = \frac{\ln 2}{6}$

$\frac{1}{6}\left(\ln(3-y) - \ln(y+3)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{\ln 2}{6}$ (3)

$y(0)=-3$: $y \equiv -3$ (2)

4. feladat (10 pont)

Oldja meg $u = -2x + 3y^2$ helyettesítéssel az alábbi differenciálegyenletet!

$$3y'y = e^{-2x+3y^2} + 1$$

(Elég az implicit alak.)

$u = -2x + 3y^2$

$u' = -2 + 6yy'$ (3) $\Rightarrow 3yy' = \frac{1}{2}u' + 1$

Elvégezve a behelyettesítést:

$\frac{1}{2}u' + 1 = e^u + 1$

$u' = \frac{du}{dx} = 2e^u$ (2)

$\int \underbrace{\frac{du}{e^u}}_{\int e^{-u}du} = 2\int dx$

$-e^{-u} = 2x + C$ (4)

Megoldás: $-e^{2x-3y^2} = 2x + C$ (1)

5. feladat (10 pont)

Írjon fel egy olyan legalacsonyabbrendű valós konstans együtthatós lineáris homogén differenciálegyenletet, amelynek megoldásai között szerepel:

$$y = 3x - 5\cos 2x$$

Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását!

Bázis: $\underbrace{1,\ x}_{\lambda_{1,2}=0},\ \underbrace{\cos 2x,\ \sin 2x}_{\lambda_{3,4}=\pm 2j}$ (4)

$\lambda^2(\lambda-2j)(\lambda+2j) = \lambda^2(\lambda^2+4) = \lambda^4 + 4\lambda^2 = 0$

A diff.egy.: $y^{IV} + 4y'' = 0$ (3)

Az általános megoldás: $y = C_1 + C_2 x + C_3\cos 2x + C_4 \sin 2x$ $C_i \in \mathbb{R}$ (3)

an2 e1 090316/3.

6. feladat (16 pont)

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''' + y'' - 2y' = 4 + 10\cos x$$

b) Milyen alakban keresheti az alábbi differenciálegyenlet egyik megoldását?

$$y''' + y'' - 2y' = \operatorname{ch} 2x + 3x$$

(Nem kell megkeresnie!)

a.) $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0$ (1) $\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 1$ (2)

$y_H = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x}$ (3)

$y_{ip} = Ax + B\cos x + C\sin x$ (2) (külső rezonancia)

$-2 \cdot |\ y_{ip}' = A - B\sin x + C\cos x$

$1 \cdot |\ y_{ip}'' = -B\cos x - C\sin x$

$1 \cdot |\ y_{ip}''' = B\sin x - C\cos x$

$-2A + \sin x(2B - C + B) + \cos x(-2C - B - C) = 4 + 10\cos x$

$\left.\begin{array}{l} -2A = 4 \\ 3B - C = 0 \\ -B - 3C = 10 \end{array}\right\}$ $A = -2,\ B = -1,\ C = -3$

$y_{ip} = -2x - \cos x - 3\sin x$ (3)

$y_{ia} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x} - 2x - \cos x - 3\sin x$ (2)

b.) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + 3x$

$y_{ip} = Ae^{2x} + Bxe^{-2x} + (Cx + D)x$

7. feladat (10 pont)

$$f(n) = \frac{7}{2}f(n-1) - \frac{3}{2}f(n-2)$$

a) Írja fel a rekurzió általános megoldását!

b) Írja fel a rekurzió $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ megoldását!

a) $q^n = \frac{7}{2}q^{n-1} - \frac{3}{2}q^{n-2}$ (2) $|\ : q^{n-2} \neq 0$

$q^2 = \frac{7}{2}q - \frac{3}{2} \Rightarrow q^2 - \frac{7}{2}q + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow q_1 = 3,\ q_2 = \frac{1}{2}$ (3)

an2 e1 090316/4.

$f(n)=C_1 3^n + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (2)

$f(0)=1 \ : \quad C_1+C_2=1$

$f(1)=3 \ : \quad 3C_1+\frac{1}{2}C_2=3$

$C_2=0$

$C_1=1$

$f(n)=3^n$ (3)

8. **feladat** (10 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{2^n\,(2n-1)!}$$

a.) $\boxed{2}$ $a_n>0$ és $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=c$

Ha $c<1$: $\sum^{\infty} a_n$ konv.

Ha $c>1$ vagy $c=\infty$: $\sum^{\infty} a_n$ div.

(Ha $c=1$: ?)

b) $\boxed{8}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n!)^2\, 2^n\,(2n-1)!}{2^{n+1}\,(2n+1)!\,((n-1)!)^2}$ (2) $=\frac{n^2}{2(2n+1)2n}=\frac{1}{4(2+\frac{1}{n})}\to\frac{1}{8}$ (4)

$\frac{1}{8}<1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv. (2)

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

9. **feladat** (12 pont)

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''-6y'+9y=32\,e^{-x}+3\,e^{2x}$$

(H): $\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2=0 \qquad \lambda_{1,2}=3$

$y_H=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$ (5)

$9 \cdot \ \ y_{ip}=Ae^{-x}+Be^{2x}$

$-6 \cdot \ \ y_{ip}'=-Ae^{-x}+2Be^{2x}$

$1 \cdot \ \ y_{ip}''=Ae^{-x}+4Be^{2x}$

$e^{-x}(9A+6A+A)+e^{2x}(9B-12B+4B)=32e^{-x}+3e^{2x}$

$16A=32 \Rightarrow A=2$

$B=3$

$y_{ip}=2e^{-x}+3e^{2x}$ (5)

$y_{iá}=y_H+y_{ip}=\dots$ (2)

10. **feladat** (8 pont)

Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\,3^{n+2}}{2^{2n}}$$

$a_n>0$

$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{n^2\,3^n\cdot 9}{4^n}}$ (2) $=\frac{(\sqrt[n]{n})^2\cdot 3\cdot\sqrt[n]{9}}{4}\to\frac{1^2\cdot 3\cdot 1}{4}=\frac{3}{4}$ (4)

$\frac{3}{4}<1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv. (2)