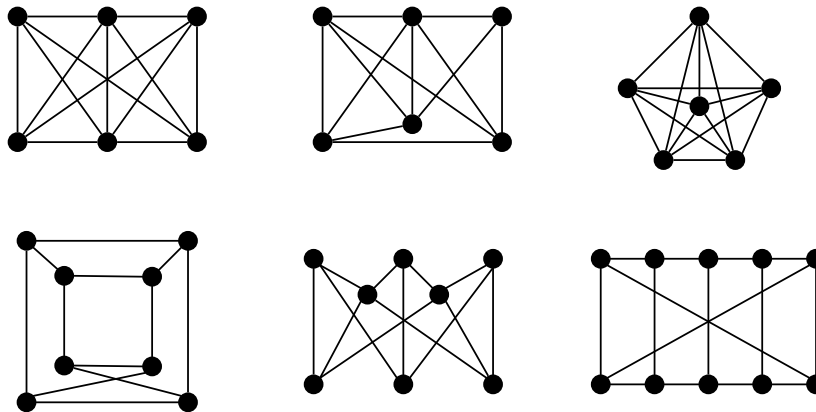


# SzA X. gyakorlat

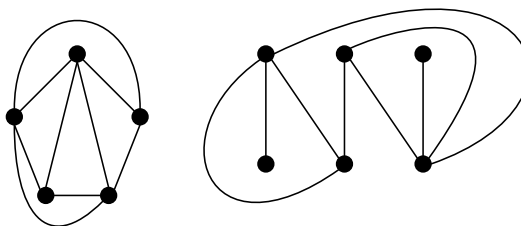
## Gráfokat színezzünk és rajzoljunk, valamint PERT

2011. november 8.

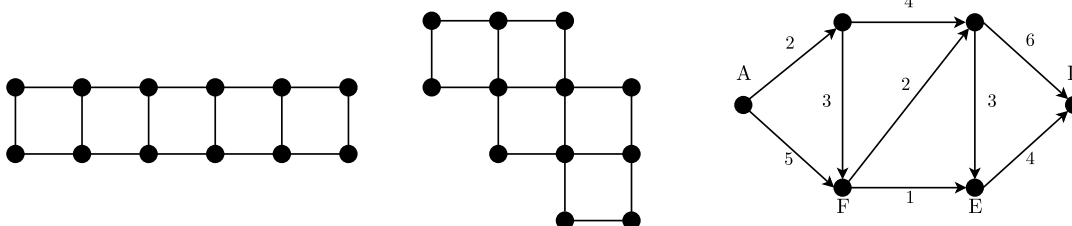
1. Legyen  $G$  100-reguláris gráf 2001 ponton. Határozzuk meg  $\chi_e(G)$  értékét!
2. Mycielski-konstrukciót használva rajzoljunk olyan  $M_k$  gráfokat, ahol  $\omega(M_k) = 2$ ,  $\chi(M_k) = k$ ,  $k = \{2, 3, 4\}$ ! De tényleg, a szabályt használva, gyakorlás miatt!
3. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



4. Hány csúcsa van egy összefüggő, 4-reguláris síkgráfnak, ha síkbarajzolásakor 10 tartomány keletkezik?
5. Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6!
6. Készítsük el az alábbi gráfok duálisát!



7. Gyengén izomorf-e az alábbi bal oldali a két gráf?



8. Határozzuk meg a PERT-módszer segítségével a fenti jobb oldali tevékenységekhez szükséges összidőt, és a kritikus tevékenységeket!

9.  $G$  csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos  $G$ -ben, ha egymásból bátyával egy lépésben elérhetők. Mennyi  $G$  kromatikus száma?
10. **[PZH 2008. december 5.]** Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges 3-kromatikus, 100 csúcsú  $G$  gráfnak van 67 olyan csúcsa, amik páros gráfot feszítenek.
11. **[ZH 2009. november 23.]** A  $G$  gráfot úgy kaptuk, hogy a 6 pontú teljes gráfból elhagytunk három független (vagyis pontdiszjunkt) élt. Síkbarajzolható-e ez a  $G$  gráf? *(Ha igen, rajzoljuk le keresztezés nélkül, csupa egyenes szakasszal, ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be!)*
12. Legyen  $G$  egy 20 pontú, összefüggő, 3-reguláris síkgráf. Hány pontja van  $G$  duálisának,  $G^*$ -nak?
13. Egy nemzetközi konferencián 5 ország egy-egy képviselője ül asztalhoz. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos! *(Feltételezhetjük, hogy a világ nem tórusz alakú, valamint nincsenek exklávék.)*
14. Rajzoltam egy  $n$  csúcsú fát, de elveszítettem. Rajzoljuk le a duálisát!
15. Adjunk meg egy olyan  $G_1$  és  $G_2$  gráfokat, hogy adott lerajzolás szerint  $G_1 \cong (G_1^*)^*$  és  $G_2 \not\cong (G_2^*)^*$ !
16. Mutassunk egy olyan egyszerű  $G$  gráfot, melynek 5 pontja van, és izomorf a duálisával!
17. Milyen a teljes gráf mélységi bejárása?
18. **[ZH 2008. november 17]** Határozzuk meg mindazon egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható  $G$  gráfokat, amiknek létezik olyan  $G^*$  duálisuk, hogy  $G \cong G^*$  teljesül, továbbá  $e = n + 2$  áll, ahol  $e$  a  $G$  éleinek,  $n$  pedig  $G$  csúcsainak számát jelöli.
19. **[ZH 2009. november 23.]** Egy 12 csúcsú konvex poliédernek 10 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?
20. **[PZH 2008. december 5]** Tegyük fel, hogy  $G$  olyan síkbarajzolható, egyszerű gráf, amibe nem tudunk további élt húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával. Igazoljuk, hogy ha  $G^*$  a  $G$  duálisa, akkor  $G^*$  3-reguláris.
21. Legyen  $G$  egy egyszerű gráf, amire  $\chi(G) = k$ . Tekintsük  $G$ -nek egy  $k$  színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!
22. Legyen  $G$  egy 3-reguláris gráf, amire  $\chi_e(G) = 3$ . Tudjuk továbbá, hogy  $G$  éleinek (a színek egymás közötti permutációjától eltekintve) egyetlen jó három színnel való színezése létezik. Van-e  $G$ -ben Hamilton-kör?
23. Bizonyítsuk be, hogy egy  $n$  csúcsú,  $e$  élű reguláris  $G$  gráfra fennáll, hogy  $\chi(G) \leq 1 + 2e/n$ !
24. Jelölje  $M_k$  a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma  $k$ . Milyen  $k$  értékekre tartalmaz  $M_k$  Euler-kört?