A44

2021. szeptember 30., csütörtök 8:42

A44

A4 Valószínűségszámítás — IV. EA

dr. Keszthelyi Gabriella
Sztochasztika és Dinamikai rendszerek tanszék

2021. szeptember 30.

Várható érték (diszkrét eset)

Jelölés: $E(X)$ (expected value)

súlyozott átlag

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) \cdot k$$

szabályos dobókocka

$E(X) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \dots + \frac{1}{6}\cdot 6 =$

$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$

X	0	1	5	7
X^2	0	1	25	49
P(X)	0,2	0,1	0,5	0,2

$E(X) = 0\cdot 0,2 + 1\cdot 0,1 + 5\cdot 0,5 +$

$+7 \cdot 0,2 = 4$

$E(X^2) = 0\cdot 0,2 + 1\cdot 0,1 + 25\cdot 0,5 +$

$+49 \cdot 0,2 = 22,4$

$$E(g(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) \cdot g(k)$$

$E(X^2), E(X^3), \dots$ második, harmadik ... momentum

Variancia, szórás (diszkrét eset)

Jelölés: $Var(X), D^2(X)$

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) \cdot (E(X) - k)^2$$

Jelölés: $SD(X), D(X)$ (standard deviation)

$$D(X) = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) \cdot (E(X) - k)^2} = \sqrt{D^2(X)}$$

X	0	1	5	7
P(X)	0,2	0,1	0,5	0,2

$D^2(X) = (0-4)^2\cdot 0,2 + (1-4)^2\cdot 0,1$

$+(5-4)^2\cdot 0,5 + (7-4)^2\cdot 0,2 = 6,4$

Várható érték, variancia tulajdonságai

Várható érték lineáris

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$$

Több tagra:

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n)$$

FÜGGETLEN valváltozók esetén

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Variancia

$$D^2(c \cdot X) = c^2 D^2(X)$$
$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

FÜGGETLEN valváltozók esetén

$$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$$

Medián (diszkrét eset)

Medián "Középső elem" ez a medián

$$P(X \le k) \ge 1/2 \quad P(X \ge k) \ge 1/2$$

2 kocka szorzatának eloszlása Medián: 10

X	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$P(X=k)$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$P(X \le k)$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$P(X \le 12) = \frac{23}{36}$ $\quad P(X \le 10) = \frac{19}{36}$ $\quad P(X \ge 10) = 1 - \frac{19}{36} + \frac{2}{36} = \frac{19}{36} > \frac{1}{2}$

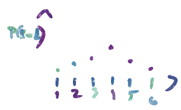
$P(X \ge 12) = 1 - \underbrace{P(X \le 12)}_{\frac{23}{36}} + P(X=12) = \frac{13}{36} + \frac{4}{36} = \frac{17}{36} < \frac{1}{2}$ ✗

Módusz (diszkrét eset)

Módusz "Leggyakoribb elem" (legvalószínűbb) $X_0 = 4$

- $P(X = k-1) < P(X = k)$ ha $k \le x_0$
- $P(X = k-1) > P(X = k)$ ha $k > x_0$

x_0 a módusz



- $P(X = k-1) < P(X = k)$ ha $k < x_0$
- $P(X = k-1) = P(X = k)$ ha $k = x_0$
- $P(X = k-1) > P(X = k)$ ha $k > x_0$

x_0 és $x_0 - 1$ a móduszok $X_0 = 3, 4$

Binomiális módusza

$P(X = k - 1) < P(X = k)$

$$\binom{n}{k-1} \cancel{p^{k-1}} \cancel{(1-p)^{n-k+1}} < \binom{n}{k} \cancel{p^{k}} \cancel{(1-p)^{n-k}}$$

$$k(1-p) < p(n-k+1)$$

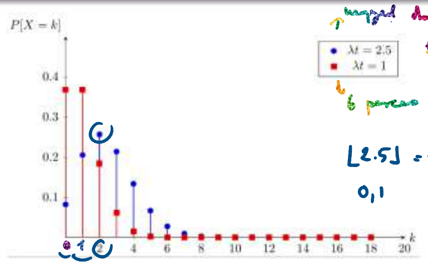
$$k - kp < pn - pk + p$$

$$k < p(n+1)$$

- ha $(n+1)p \notin \mathbb{N} \Rightarrow x_0 = \lfloor (n+1)p \rfloor$
- ha $(n+1)p \in \mathbb{N} \Rightarrow x_0 = (n+1)p,\ (n+1)p - 1$

Poisson again

Példa
Telefonos ügyfélszolgálatra óránként átlagosan 10 hívás érkezik. Mi a vszsége, hogy negyed óra alatt több, mint 3 hívás fut be? 6 perc alatt több, mint 2 hívás? Mennyi a legvalószínűbb hívásszám?



$\frac{10}{4} = 2.5$

$\lfloor 2.5 \rfloor = 2$

0, 1

Poisson módusza

A legvalószínűbb eseményt keressük, azaz

$$x_0 = \max_k (P(X = k))$$

$k < \lambda t$

- $P(X = k - 1) < P(X = k) \quad \forall k \leq x_0 \Rightarrow$

$$\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} < \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \Leftrightarrow k < \lambda t$$

- $P(X = k - 1) > P(X = k) \quad \forall k > x_0 \Leftrightarrow k > \lambda t$

Ha λt nem egész, akkor $\lfloor \lambda t \rfloor$. Illetve ha λt egész, akkor $\lambda t - 1$ és λt is módusz.

Mire jó a módusz?

Kisülések száma $\boxed{Y \sim Poisson(\lambda)}$

$X \sim Binom(100, p)$
$P(\text{hibátlan}) = p$

Példa
Van egy dobozom tele félvezető chipekkel, 100-at kivettem (visszatevéssel) 6 volt közöttük hibátlan (azaz nem volt egy kisülés sem benne). Ha kihúzok még egyet random, mi a legvalószínűbb, hogy hány kisülés lesz benne?

p	0.015	0.030	0.045	0.060	0.075	0.090	0.105	0.120	0.135	0.150
$P(X=6) = \binom{100}{6}p^6(1-p)^{100-6}$	0.003	0.050	0.131	0.166	0.139	0.089	0.047	0.022	0.009	0.003

$p = 0{,}06$

$P(\text{hibátlan}) = \frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t} = 0{,}06$

$\lambda t \approx 2{,}81$

módusz $= \lfloor \lambda t \rfloor = \underline{\underline{2}}$

$P(Y=6) = \frac{(\lambda t)^6}{6!}e^{-\lambda t} = \boxed{\frac{2{,}81^6}{6!}e^{-2{,}81}}$

λt a [illegible], hogy egy random [illegible] [illegible] [illegible] kisülés van.

Nevezetes eloszlások várható értéke, varianciája, módusza

Bernoulli/indikátor eloszlás $P(X=1) = p$ $P(X=0) = 1-p$

$X^2 \to 1$, $\to 0$ $E(X^2) = p$

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$
$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Ha $p = 1/2$ akkor két módusz van: 0,1, ha $p < 1/2$ akkor a módusz 0, $p > 1/2$ akkor a módusz 1.

Binomiális eloszlás n db Bernoulli összege
$Y \sim Binom(n, p)$ $X_i \sim Bernoulli(p)$ $Y = \sum X_i$

!

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n \cdot p$$

$E(\sum X_i)$

$$D^2(Y) = np(1-p)$$ $D(Y) = \sqrt{np(1-p)}$

Ha $(n+1)p \notin \mathbb{N} \Rightarrow \lfloor (n+1)p \rfloor$ a módusz, ha pedig $(n+1)p \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1)p$, $(n+1)p - 1$ a móduszok.

Nevezetes eloszlások várható értéke, varianciája, módusza

Hipergeometriai eloszlás

$$P(X = m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}, \; D^2(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)$$

Ha $(n+1)\frac{M+1}{N+2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \lfloor (n+1)\frac{M+1}{N+2} \rfloor$ a módusz, ha pedig $(n+1)\frac{M+1}{N+2} \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1)\frac{M+1}{N+2}$, $(n+1)\frac{M+1}{N+2} - 1$ a móduszok.

Geometriai eloszlás

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

$$E(X) = 1/p, \; D^2(X) = (1-p)/p^2$$

Módusz=1

Nevezetes eloszlások várható értéke, varianciája, módusza

Negatív binomiális eloszlás

$$P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = \frac{n}{p},\ D^2(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

Ha $\frac{n-1}{p} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \left\lfloor \frac{n-1}{p} \right\rfloor$ a módusz, ha pedig $\frac{n-1}{p} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n-1}{p}, \frac{n-1}{p} + 1$ a móduszok.

! **Poisson eloszlás**

$$D(X) = E(X) = \lambda t,\ D^2(X) = (\lambda t)^2$$

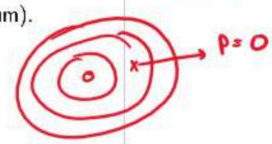
Ha $\lambda t \notin \mathbb{N}$, akkor $\lfloor \lambda t \rfloor$. Illetve ha $\lambda t \in \mathbb{N}$, akkor $\lambda t - 1$ és λt is módusz.

Folytonos valószínűségi változók

Emlékeztető

Folytonos valószínűségi változó esetén az értékkészlet $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}$ valamilyen nem elfajuló részhalmaza (intervallum).
$X : S \to \mathbb{R}$
Pl. alkatrészek élettartama, termékek súlya

MINDIG
$P(X=x)=0$



$$P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\left[P(X \leq x) = P(X < x) \right]$$
$$P(a < X < b) \longleftrightarrow X \in (a, b)$$

Mik az értelmes kérdések?

$P(X < x) = ?$, $P(X > x) = ?$, $P(x < X < y) = ?$

Sűrűség- vs eloszlásfüggvény

$F'(x) = f(x)$

$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x)$

Sűrűségfüggvény

diszkrétben: sűrűségfv $P(X=k)$

Jelölés: $f(x)$

$\left[f(x) \approx \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} \right]$

$\int_a^b f(x)dx = P(a < X < b)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$= \underbrace{F(\infty)}_{1} - \underbrace{F(-\infty)}_{0} = 1$

$P(X=x)=0$

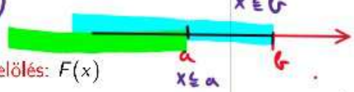
integrálás →

← deriválás

= NEWTON-LEIBNIZ

Eloszlásfüggvény

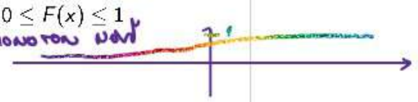
$x \in b$



Jelölés: $F(x)$

$$F(x) = P(X \leq x)$$
$$F(b) - F(a) = P(a < X < b)$$
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 = P(X < -\infty)$$
$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 = P(X \leq \infty)$$
$$0 \leq F(x) \leq 1$$

MONOTON NÖVŐ



$P(a < X < b) =$
$P(X<b) - P(X<a)$
$F(b) \quad F(a)$

Egyenletes eloszlás (folytonos eset)

$P(X=c)=0$

$P(X<c)=\frac{c-a}{b-a}$

$P(X>c)=\frac{b-c}{b-a}$

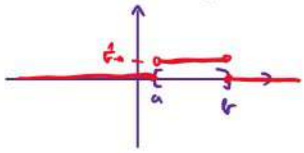
Sűrűségfüggvény

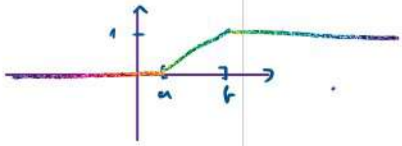
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{ha } a<x<b\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$$

Eloszlásfüggvény

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a<x<b\\ 1 & \text{ha } x>b\end{cases}$$

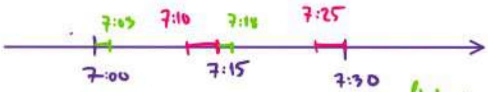
[a, b] intervallumon vett egyenletes eloszlás





Példa egyenletesre

A buszok 15 percenként érkeznek 7 és 8 között: 7, 7:15, 7:30, 7:45, etc. Ha az utas reggel 7 és 7.30 között érkezik egyenletes eloszlással, akkor mi a valószínűsége, hogy (a) kevesebb, mint 5 percet fog várakozni, (b) legalább 12 percet fog várakozni?



a)

jó esetek: összesen 10 perc

az egész intervallum: 30 perc

$\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

b.) jó esetek: összesen 6 perc

$p=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

Exponenciális eloszlás

Általában azt az időt méri, amíg egy adott esemény bekövetkezik. Pl. amíg az első földrengés bekövetkezik, vagy háború kitör (mostantól számítva), vagy két esemény között eltelt időnek a hosszát adja meg. Gyakran alkatrészek élettartamának eloszlását is modellezik vele (olyanokét, ahol nem kopástól következik be).

ÖRÖKIFJÚSÁG: $P(X>s+t|X>t)=P(X>s)$

Sűrűségfüggvény

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x>0\end{cases}$$

Eloszlásfüggvény

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{ha } x>0\end{cases}$$

$$E(X)=1/\lambda$$

Példa exponenciálisra

X élettartam X ~ Exp(1/5)

TV készülék várható élettartama 5 év. Mi a vszsége, hogy 8 évnél tovább bírja? Mi a vszsége, ~~hogy 3 év után tönkremegy~~? Mi a vszsége, hogy ha már élt 5 évet még fog 3-at?

legalább 3 évet fog élni:

$E(X)=5$ $\lambda = \frac{1}{5}$ $F(x) = 1-e^{-\lambda x} = P(X \le x) = 1-e^{-\frac{x}{5}}$

$P(X>8) = 1-P(X\le 8) = 1-F(8) = 1-(1-e^{-\frac{8}{5}}) = e^{-\frac{8}{5}}$

$P(X\le 3) = F(3) = 1-e^{-\frac{3}{5}}$

$P(5<X<8) = ?$

Mi a vszsége, hogy 5 és 8 év között fog tönkremenni?

$P(X\ge 8 \mid X\ge 5) = \frac{P(X\ge 8 \cap X\ge 5)}{P(X\ge 5)} = \frac{P(X\ge 8)}{P(X\ge 5)} = \frac{1-P(X<8)}{1-P(X<5)} = \frac{1-F(8)}{1-F(5)} = \frac{1-(1-e^{-\frac{8}{5}})}{1-(1-e^{-\frac{5}{5}})} = \frac{e^{-\frac{8}{5}}}{e^{-\frac{5}{5}}} = e^{-\frac{3}{5}} = 1-F(3) = P(X\ge 3)$

ÖRÖKIFJÚSÁG

Geometriai valószínűségek

GEOM VSZSÉG: $\frac{P(A)}{P(S)} = \frac{P(A)}{1}$ A = egy halmaz

T_A terület

Példa
Egy egységnyi hosszú dróton kiválasztunk [illegible] egyenletesen x és y pontot. Mi a valószínűsége, hogy ezek mentén meghajlítva egy háromszöggé hajtogatható?

$Y<1-Y$ $X>1-X$

$X-Y<Y+1-X$

0 Y X 1

$y<\frac{1}{2}$ $x>\frac{1}{2}$ $y>x-\frac{1}{2}$

1. eset $X<Y$

$Y-X < X+1-Y$ $y<x+\frac{1}{2}$

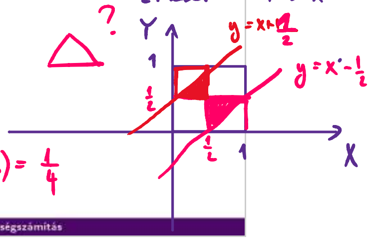
0 X Y 1

$X<1-X \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$

$1-Y<Y$ $y>\frac{1}{2}$

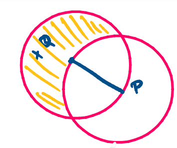
$P(\triangle) = \frac{1}{4}$

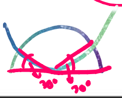
2. eset $Y>X$



Geometriai valószínűségek

Példa
Találomra kiválasztunk egy P pontot az egységkör kerületén, majd egy Q pontot a körlapon. Mennyi a valószínűsége, hogy a QP szakasz hossza nagyobb, mint 1?

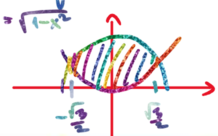




$T = ?$

$x^2+y^2=1$

$y=\sqrt{1-x^2}$



$T = 1 - \frac{T}{T} = 1 - \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\pi}$

POLÁR
$x = \cos x$
$y = \sin x$

$T_A = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $T = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ $T = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$

$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{1-\cos^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{\sin^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin x\,dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = T$

Irodalomjegyzék

- Vetier András—Valószínűségszámítás
- Alberto Leon-Garcia—Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering
- Sheldon M. Ross —Introduction To Probability and Statistics for Engineers and Scientists

Köszönöm a figyelmet!