MATEK

1, $\boxed{\text{SVD szinguláris érték}}$ felbontás

(1)

$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$

0, A^TA λ-ja Γ

1, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma)$

2, V : σ-hoz tartozó sajátvektor (A^TA λ-hoz)

3, $u_i = \frac{A v_i}{\sigma_i}$ u_{i+1} :   /Mj: ha $\sigma_i = 0$, akkor a többire merőleges legyen

$\boxed{\text{pszeudoinverz}}$

$A^+ = V \cdot \Sigma^+ \cdot U^T$ $\Sigma^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{bmatrix}$

⇒ optimális megoldás $x = A^+b$
sortér → oszloptér
b kiegészítő tér → nullter

$A^+ = A^-$, ha invertálható

$(A^+)^+ = A$

$A^+(Ax) = x$

$A^+ = (A^T \cdot A)^{-1} A^T$ teljes oszloprangú

$A^+ \cdot z = 0$ z: oszloptérre merőleges vektor

$A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$ teljes sorrangú

$A A^+ A = A$
$A^+ A A^+ = A^+$
$(A A^+)^T = A A^+$
$(A^+ A)^T = A^+ A$

$A^+ = R^+ B^+$
(R^+: teljes sorrang, B^+: teljes oszloprang)

$A^+ = R^T (R R^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T$

$A^+ = \frac{R^T B^T}{B^T A R^T}$

$A^+A = \mathrm{proj}_S(A)$ $A A^+ = \mathrm{proj}_O(A)$

$\boxed{\text{QR felbontás}}$

Gram Schmidt - ortogonalizációs eljárás

$A = Q R$ (Q: kanon. ort., R: felső Δ mátrix) $R = Q'A$

1) $Q = v_1 | v_2$ normált bázis

$v_1 = (\quad)$

$v_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1$

2) $R = Q^T A$

⇓ optimális megold $x = R^{-1} Q^T b$

Givens - forgatás: $R = Q_2 Q_1 A$
$Q = (Q_2 Q_1)^{-1} = Q_1^T Q_2^T$

$Q_1 \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $AQA \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & \cdot \\ 0 & & \end{bmatrix}$ $Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{forgatás}}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

tengely körül:

$U = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 001 \end{bmatrix}$ (tengely | merőlegesek)

forgató mátrix: $A = U B U^{-1}$

$\boxed{\text{ortogonális}}$

→ páronként ⊥ vektorok (sor, oszlop)

⇒ $A \cdot A^T = I = A^T A$

⇒ $A^T = A^{-1}$

$|Ax| = |x|$

$Ax \cdot Ay = x \cdot y$

$|\det(A)| = 1$

Jordan - mátrix

$$e^{J} = e^{\lambda} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & 1 & 1 & & \frac{1}{(n-2)!} \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Jordan - féle mátrix

normálalak

1, sajátértékek meghat $\to \lambda$

2, $A - \lambda 1$ nullvektorba vivő vektorok $\to v_1 \dots v_n$

3, $C = [v_1 | v_1 \dots | v_n]$

4, $A = C J C^{-1}$

$\to J = \mathrm{diag}(\lambda)$

transzponálás

$(A^T)^T = A$

$(A + C)^T = A^T + C^T$

$(cA)^T = c \cdot A^T$

$(AB)^T = B^T \cdot A^T$

normális

$A^* A = A A^*$

A pontosan akkor unitéren diagonizálható

- szimmetrikus v ferdén szimmetrikus ($= -1 A^T = A$)

kvadratikus alak

$x^T C \cdot x$

szimm

$x = \overset{\text{ortogon}}{Q} y$ $\quad x^T C x = (Qy)^T \cdot C \cdot (Qy) = y^T \underbrace{\overset{\text{diagon.}}{Q^T C Q}}_{\Lambda} y = y^T \Lambda y$

$y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_n y_n^2$

Q vektorai főtengelyek

unitér

$\Lambda = U^* A U$

$\det(A) = 1$

$U^* U = 1 \quad \to \quad U^* = U^{-1}$

$|Ux| = |x|$ távolságtartó

$Ux\, Uy = xy$

pozitív definit

- λ csak pozitív
- $f(x) = x^T A x > 0$
- csak valós szimmetrikus mátrixokra értik
- ha $\det(A) = 0$, vagy A valamely részmátrixára ez igaz, nem poz. def.

- lin. ftlen. sorok kellenek hozzá.

③

Reducibilis - spektrálsugár - Perron vektor

$\varrho(A)$

$r = \varrho(A) > 0$ ↳ legnagyobb sajátérték

origó kp-ú kör sugara

r-hez pozitív sajátvektor tartozik

$Ap = rp$ $\Sigma p_i = 1$ $q^T A = r q^T$ q bal Perron-vektor

r egyszeres sajátérték

Frobenius nemnegatív mátrix felírható pozitívnak, ha reducibilis

⇒ sorok és oszlopok azonos permutációjával $PRP^T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ A, C négyzetes

gráfok: ha van zárt részhalmaz, akkor ez ⇒ reducibilis

ha erős összefüggő: minden ~~élt~~ pontot be lehet járni, akkor van ⇒ irreducibilis

ortogonális diagonizálás

$\Lambda = Q^T A Q$

Λ ↓ diag

Q ↓ mátrix ↳ ortogon. (ezzel dolg kell) Gram-Schmidt

Λ: A sajátértékei

Q: A sajátvektorai

spektrálfelbontás: $\lambda_1 x_1 x_1^T + \lambda_n x_n x_n^T$

polárfelbontás

$A = P \cdot Q$ unitér. ortogonális

P: poz. hermitf. mátrix

$P = U \Sigma U^T$ (mint az SVD felbontás)

$Q = U V^T$

vektornormák

$p = 1$ rácsnorma koordináták abs. értékeinek összege

$p = 2$ hossz $\sqrt{(x_1)^2 + \quad + (x_n)^2}$ → euklideszi norma

$p = 3$ $\sqrt[3]{(x_1)^3 + \quad + (x_n)^3}$

$p = \infty$ legnagyobb abs. értékű koordináta

mátrixnormák

$\|A\|_1$ legnagyobb összegű oszlop összege

$\|A\|_\infty$ — " — sor összege

$\|A\|_2$ legnagyobb abszolútértékű szinguláris érték

$\|A\|_F$ $\sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2}$ $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \cdot \|x\|_2$

Frobenius — elemek összegének gyöke

$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$, ahol σ_n a legkisebb σ

minimálpolinom = karakterisztikus polinom

exponenciális függvény e^A

végtelen mátrix $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!}$

$A = CJC^{-1}$ $e^A = C e^J C^{-1}$

$e^J = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & & \end{bmatrix}$

determináns

ha $\det(A) = 0$:
- sorok/oszlopok lineárisan összefüggők
- A szinguláris
- $Ax = 0$ -nak van nem triviális megoldása
- $Ax = b$ nem oldható meg egyértelműen

$c^n \det(A) = \det(c \cdot A)$

$\det(EA) = \det(E)\det(A)$ (EA azonos méretű négyzetesek)

$\det(A^T) = \det(A)$

$\det(A^n) = n \det A$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

bázíscsere

$v_C = A_{C \leftarrow B} v_B$ $v_C = [[b_1]_C\ [b_2]_C \ldots [b_n]_C]$

$[\underline{C} \mid \underline{B}] \xrightarrow{\text{Gauss}} [\underline{\underline{I}} \mid A_{C\leftarrow B}]$

LU-felbontások

L U

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$

PLU

permutáció

$PA = LU$

$A = P^T LU$

akkor, ha $a_{ii} = 0$

LDU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{u_2}{d_1} & \frac{u_3}{d_1} \\ 0 & 1 & \frac{u_5}{d_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Schur-felbontás

$A = Q U Q^{-1}$

Q unitér $(Q^{-1} = Q^{*})$

U: felső Δ mátrix

$U \sim A$

U főátlójában A mátrix sajátértékei vannak.

Hasonlóság

$A \sim B$

- sajátértékei megegyeznek

- $n \times n$-esek

· $\underbrace{B = C^{-1} A C}$ → A mátrix C-vel való konjugáltja

C invertálható

$r(A) = r(B)$

$\dim(\mathcal{N}(A)) = \dim(\mathcal{N}(B))$

$\det(A) = \det(B)$

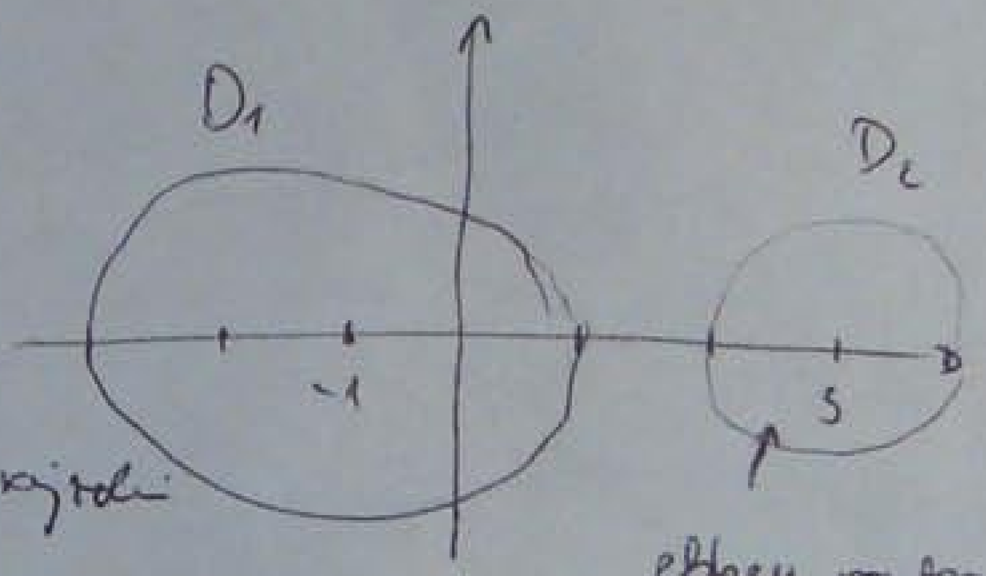
· $CB = AC$

· akkor hasonlóak, ha van 2 bázis, melyekben ugyanazok

$B = C^{-1}_{E \leftarrow C} A C_{E \leftarrow C}$

Gershgorin-körök

$n \times n$



$D_1(-1, 2)$

$D_2(3, 1)$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

ebben pontosan 1 gyök (λ) van

· mátrixból azonnal fel lehet rajzolni

· kör jele D(kp, sugár)

· kp: a_{ii} elemek (főátlóban)

· sugár: abban a sorban (i) lévő elemek abs. értékeinek összege

· mindegyik sajátérték a körök területén belül helyezkedik el

· komplex gyökök párban $x \pm iy$

sorokra és oszlopokra is megnézhetjük

Optimális megoldás

→ $x = A^{+} b$

→ $x = R^{-1} Q^{T} b$

→ $A^{T} A x = A^{T} b$

Vetítés + Tükrözés

$I - \frac{a a^{T}}{a^{T} a}$ $\qquad$ $I - 2\frac{a a^{T}}{a^{T} a}$ $\qquad$ a: vektor

$A(A^{T}A)^{-1}A^{T}$ $\qquad$ $2A(A^{T}A)^{-1}A^{T} - I$

Diagonizálhatóság

- $A = C^{-1} A C$, ortogonálisan diagonizálható, ha $C = Q$ (ortogon)
- ha van n db lin. ftlen sajátvektora
- sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitás összege n.