Fizika űrmérnököknek
Koordinátarendszerek

Beneda Károly adjunktus

2023. III. 22.

Tartalom

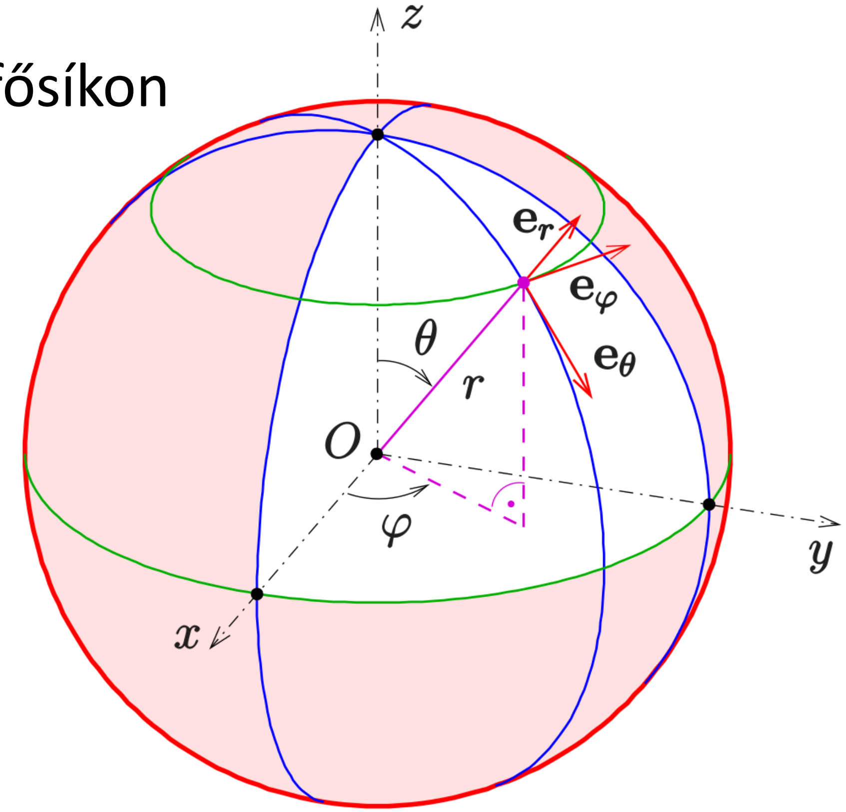
- Inerciarendszerek
- Forgó koordináta-rendszerek
- Időmérés
- Galilei-transzformáció
- Speciális relativitáselmélet
- Tömeg-energia ekvivalencia
- Lorentz-transzformáció
- Az általános relativitás elve
  - a gravitáció hatása a tér görbületére
  - a gravitáció hatása az idő mérésére

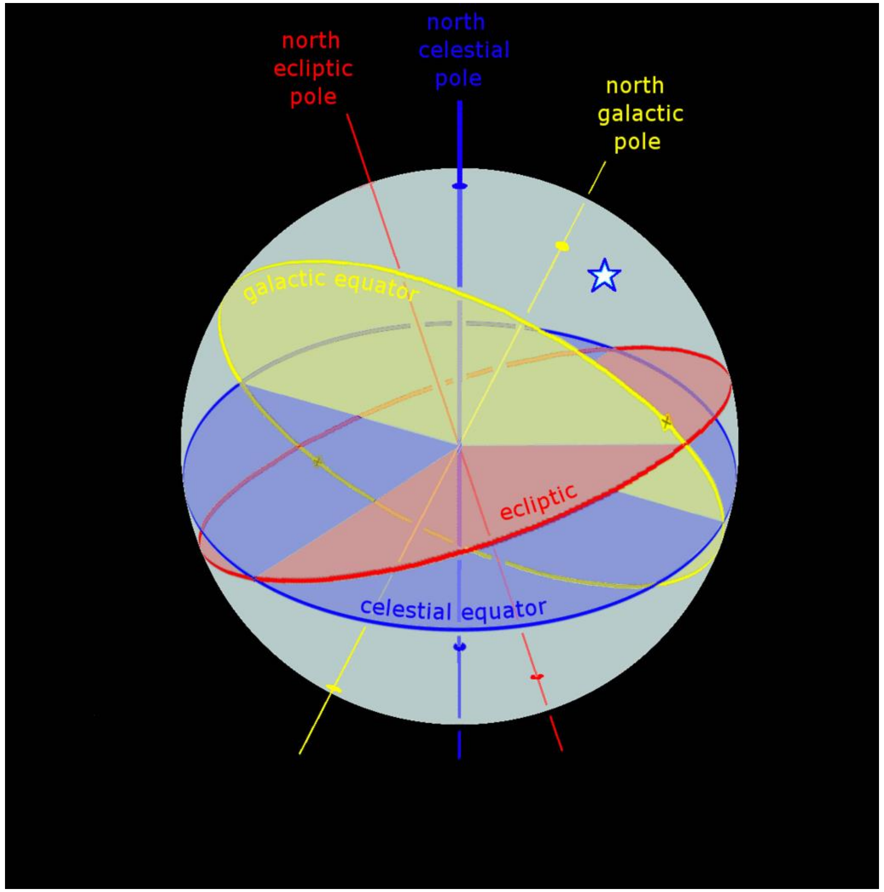
Inerciarendszerek

- Olyan rendszer, amelyre érvényes Newton I. törvénye, vagyis egy erőhatásoktól mentes test megtartja mozgásállapotát (egyenes vonalú egyenletes mozgását, avagy zérus sebességét)
- Az ilyen rendszer **nem állhat semmiféle gyorsulás hatása alatt**, vagyis sem lineáris gyorsulás, sem forgás nem megengedett.
- Minden inerciarendszer a többihez képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végez
- Amennyiben nem inerciarendszerben végzünk vizsgálatot, akkor fellépnek az ún. tehetetlenségi erők, amelyeket a gyorsuló vonatkoztatási rendszer megfigyelője észlel egy test mozgásakor

Inerciarendszerek

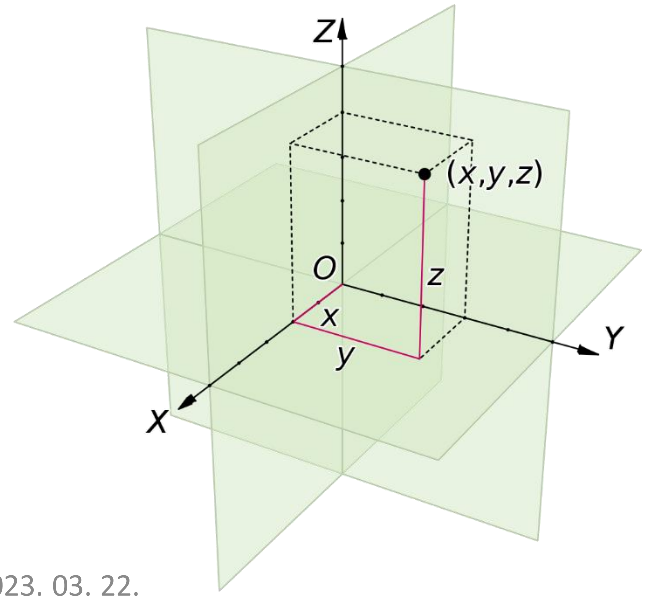
- Az űrbeli mozgások kapcsán leginkább az első és a harmadik használatos
- Egy koordinátarendszert egyértelműen meghatároz:
    - Az origó helyzete
    - A fősík iránya
    - A főtengely iránya a fősíkon

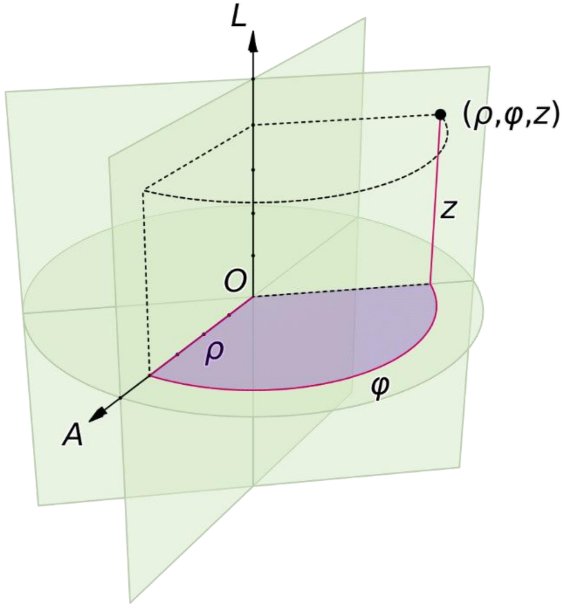


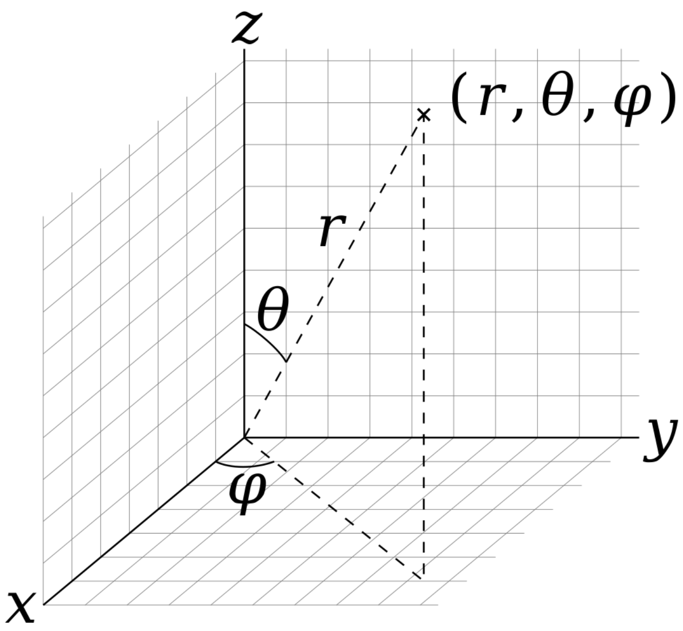


Inerciarendszerek

- Bármilyen vonatkoztatási rendszerben többféle koordinátarendszer szerint lehetséges tájékozódni, leggyakoribbak:
  - Derékszögű (Descartes-féle)
  - Henger
  - Gömbi







Inerciarendszerek

- Transzformációk az egyes koordináta-rendszerek között:
  - Gömbi ↔ derékszögű

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$x = r \cos\theta$$

Inerciarendszerek

- Derékszögű ↔ gömbi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{cases} \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, ha\ z > 0 \\ \pi + \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, ha\ z < 0 \\ +\frac{\pi}{2}, ha\ z = 0 \text{ és } xy \neq 0 \\ nem\ definiált\ ha\ x = y = z = 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \operatorname{sgn}(y) \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, ha\ x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} \pm \pi, ha\ x < 0 \text{ és } y \substack{\geq \\ <} 0 \\ \pm\frac{\pi}{2}, ha\ x = 0 \text{ és } y \substack{> \\ <} 0 \\ nem\ definiált, ha\ x = y = 0 \end{cases}$$

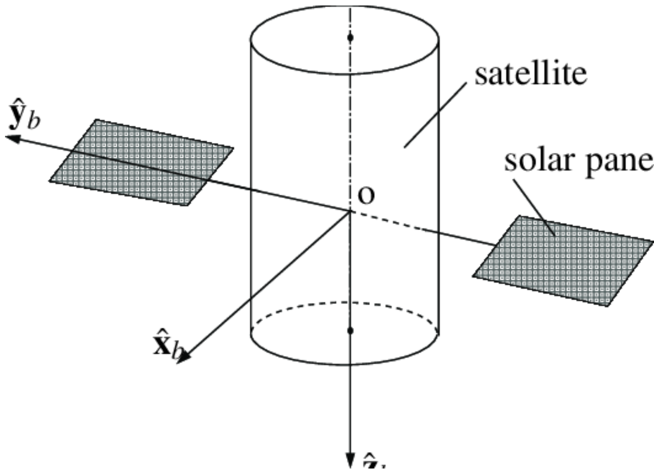
Inerciarendszerek

- A koordinátarendszerek origója többféle is lehet:
    - Topocentrikus – a megfigyelő rögzített helyzete egy bolygó felszínén
    - Nap-, Föld-, Mars-, Hold-, stb. –centrikus: az adott égitest tömegközéppontja
    - Barycentrikus: Egy adott égitestcsoport (pl. Föld-Hold) közös tömegközéppontja
- A fősík mindig az origón halad át, és a pozitív normálvektora határozza meg, mely legtöbbször a z-tengely.
- A főtengely egy irányított egyenes, amely a fősíkban fekszik és leggyakrabban a +x irányt adja meg
- Ezen jellemzők többségében egy már korábban definiált koordináta-rendszerhez viszonyítva kerülnek megadásra

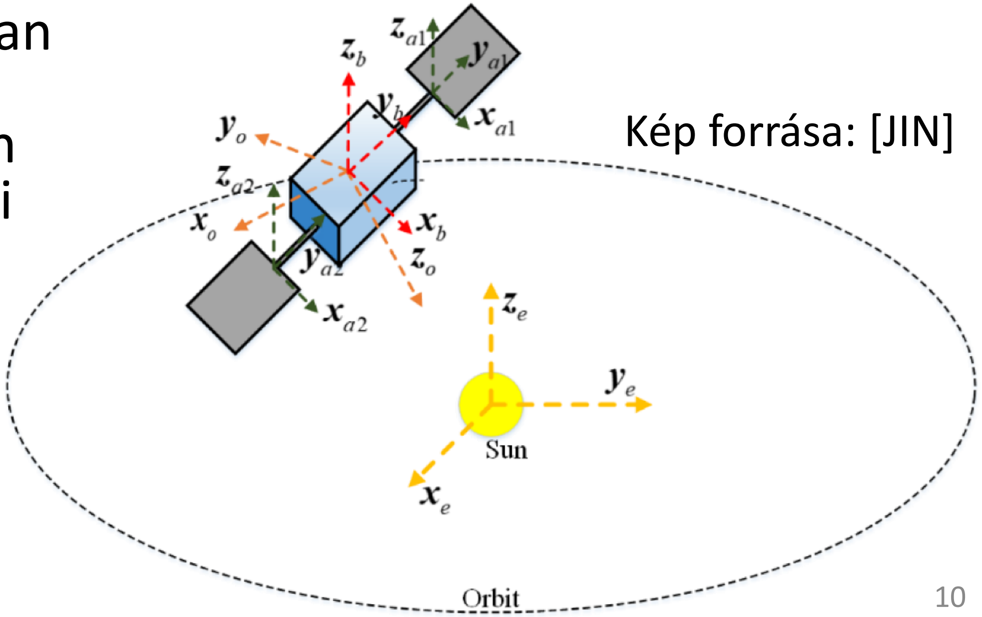
Inerciarendszerek

- Tekintsünk egy tipikus meghatározást:
  - Az origó a Föld tömegközéppontja, a fősík az Egyenlítő síkja, és az x tengely a tavaszpont felé mutat
- Csak olyan hajszálnyi problémák merülnek fel, mint pl.
  - A Föld tömegközéppontja önmaga is mozog az égitesten belül
  - A Föld nem egy teljesen merev test
  - A Föld forgástengelye is folyamatosan változik
  - A tavaszpont nem egy fix irány
- Ezen problémák kiküszöbölhetőek az *epocha* használatával, amikor a helyzet meghatározása történik, pl. Egyenlítő 2000.0
- Továbbá nincs alapvető inerciarendszer, mert minden gyorsul a belső és külső gravitációs erők hatására

Inerciarendszerek – jellegzetes vonatkoztatási rendszerek



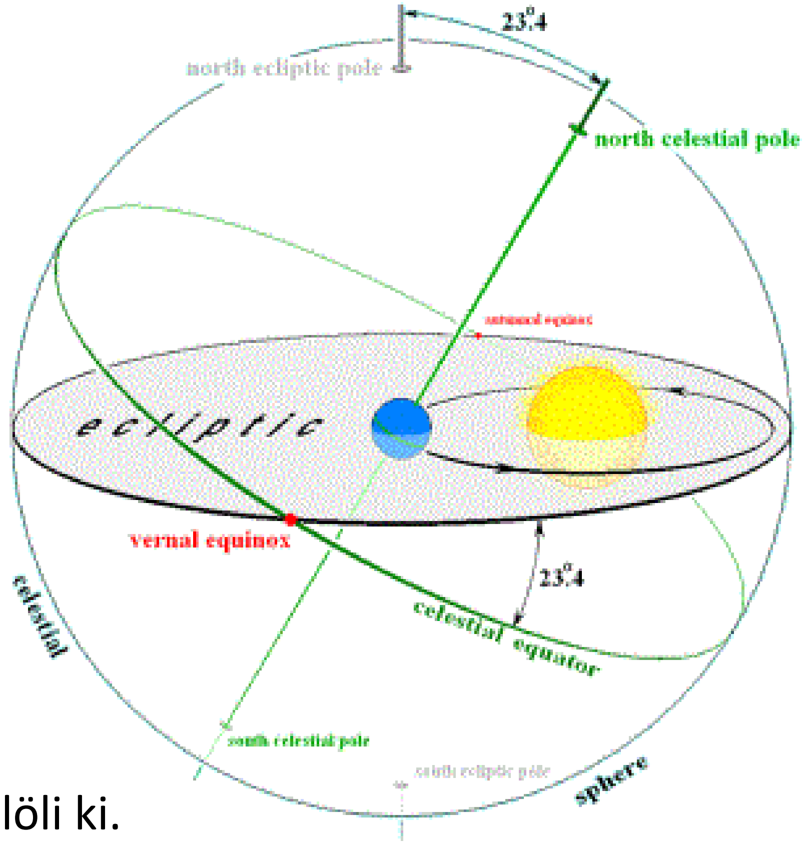
- Űreszköz test-koordinátarendszer
  - Origó a berendezés egy jellegzetes pontja, és három ortogonális tengely
  - Az összeépítés során a különböző részegységek elhelyezésekor alkalmazható
  - Működés során (indítási rázkódások, hőtágulások a pályán) ezek általában elmozdulhatnak → megakadályozásukra minden lehetséges lépést meg kell tenni, de nem mindig maradnak elhanyagolhatók
  - Vannak továbbá olyan eszközök (napelemtáblák vagy egyéb kardáncsuklós felfüggesztésű részek), amelyeket szándékosan mozgatnak
  - Ezért célszerű a test-koordinátarendszert valamilyen kellően merev, nem mozgó szerkezeti elemhez viszonyítva definiálni (navigációs keret, vagy hasonló), amelyben a legfontosabb tájolási és hasznos teher műszerek elhelyezkednek
  - A tájolás lényege, hogy meghatározzuk, illetve befolyásoljuk az űreszköz valamely külső vonatkoztatási rendszerhez viszonyított helyzetét



Kép forrása: [JIN]

Inerciarendszerek – jellegzetes vonatkoztatási rendszerek

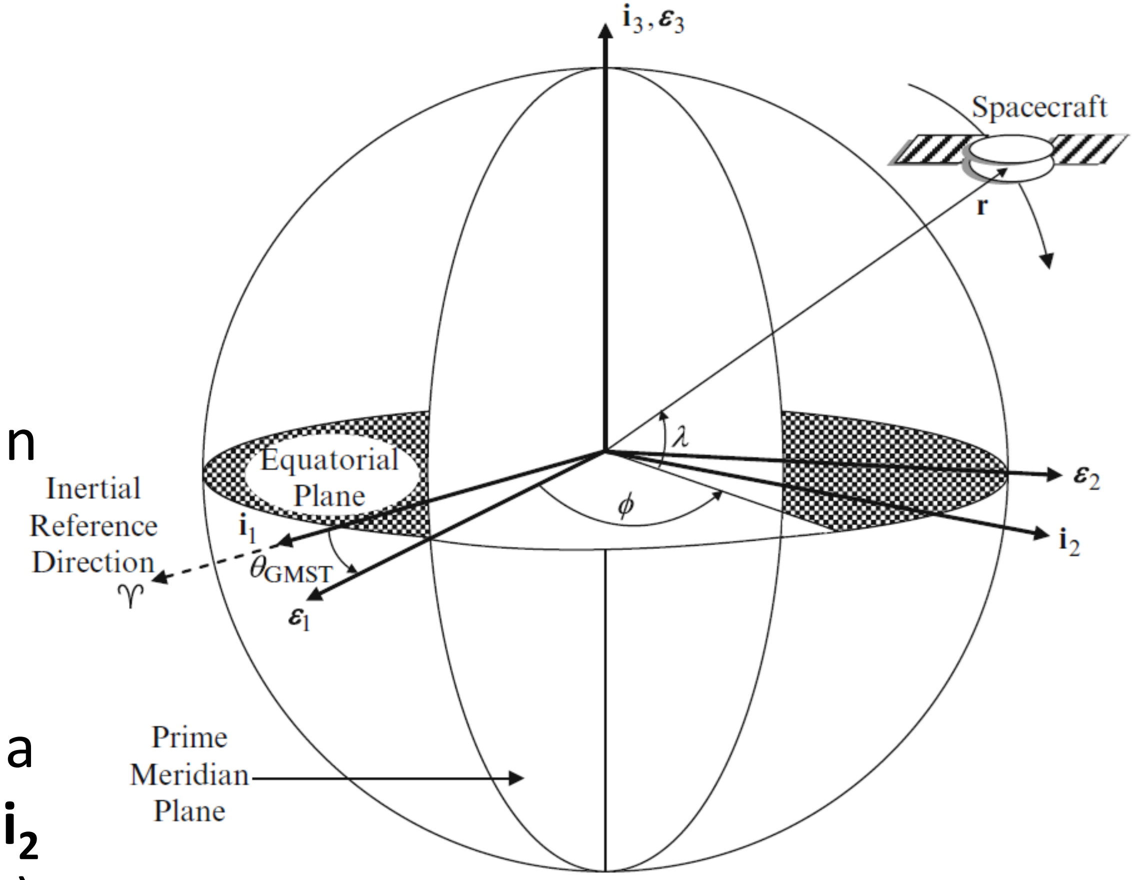
- Inerciarendszerek - ICRF
  - Távoli „álló” csillagokhoz viszonyítva közelíthetjük legjobban az inerciarendszereket
  - A szabványos megoldás az **International Celestial Reference System/Frame (ICRF),** melynek tengelyeit sok száz (608) távoli galaxison kívüli rádióhullám-forrás alapján nagy távolságú interferometriával határoztak meg [ICRF]
  - A z tengely a Föld északi tengelyével esik egybe
  - Az x tengely a tavaszpont (vernal equinox)
    - A Föld egyenlítői síkjának és Nap körüli keringési síkjának metszete, amelynek irányát a Napnak a tavasz első napján elfoglalt helyzete jelöli ki.
  - Sajnálatos módon sem a forgástengely, sem a keringési sík nem rögzített, ezért az ICRF a közepes (átlagos) irányokat jelölik ki, amelyek a valóságos irányok rövidtávú ingadozásait kiátlagolják, egy bizonyos időpontban (epocha).
  - Az origó a Naprendszer tömegközéppontja.



Kép forrása: [ICRS]

Inerciarendszerek – jellegzetes vonatkoztatási rendszerek

- Inerciarendszerek - GCI
  - Egy másik hozzávetőleges inerciarendszer: a **Geocentric Intertial Frame (GCI)**
  - Origója a Föld tömegközéppontja
  - Ennek a vonatkoztatási rendszernek sajnos van lineáris gyorsulása, mert a Föld kering a Nap körül, vagyis nem egyenes vonalú mozgást végez
  - A tengelyek szintén a közepes északi pólus és a közepes tavaszpont irányába mutatnak (az $\mathbf{i_1}$, $\mathbf{i_2}$ és $\mathbf{i_3}$ egységvektorok által kifeszített tengelyek)

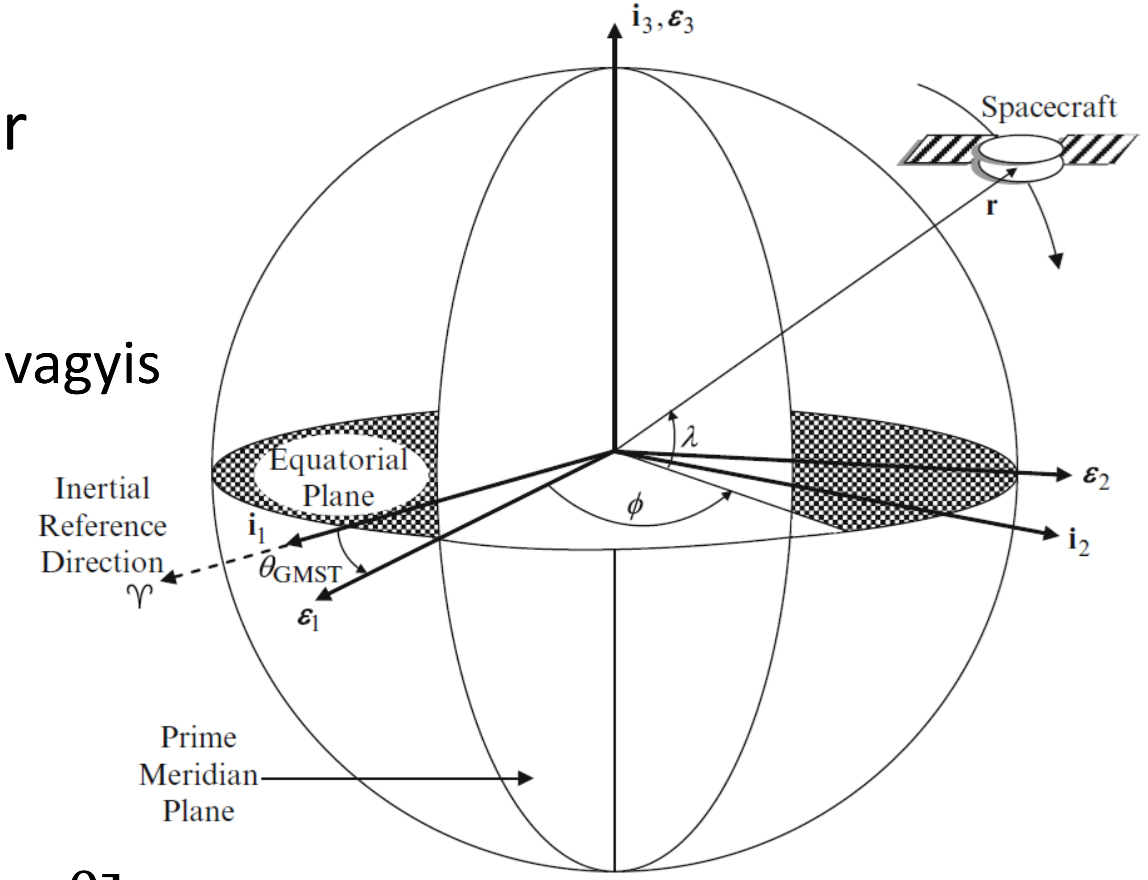


Kép forrása: [MARKLEY]

Inerciarendszerek – jellegzetes vonatkoztatási rendszerek

- Földközéppontú Földhöz rögzített rendszer
  - **Earth-Centered/Earth-Fixed (ECEF)** Frame
  - A $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ tengely megegyezik az $\mathbf{i}_3$-mal
  - az $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ viszont mindig együtt mozog a főkörrel, vagyis a nullás szélességi fokkal
  - Ennek megfelelően a GCI rendszerhez képest periodikusan változó elforgatást szenved $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ körül, amelynek mértéke a Greenwichi Sziderikus Középidő szöge (θ_{GMST})
  - Transzformáció:

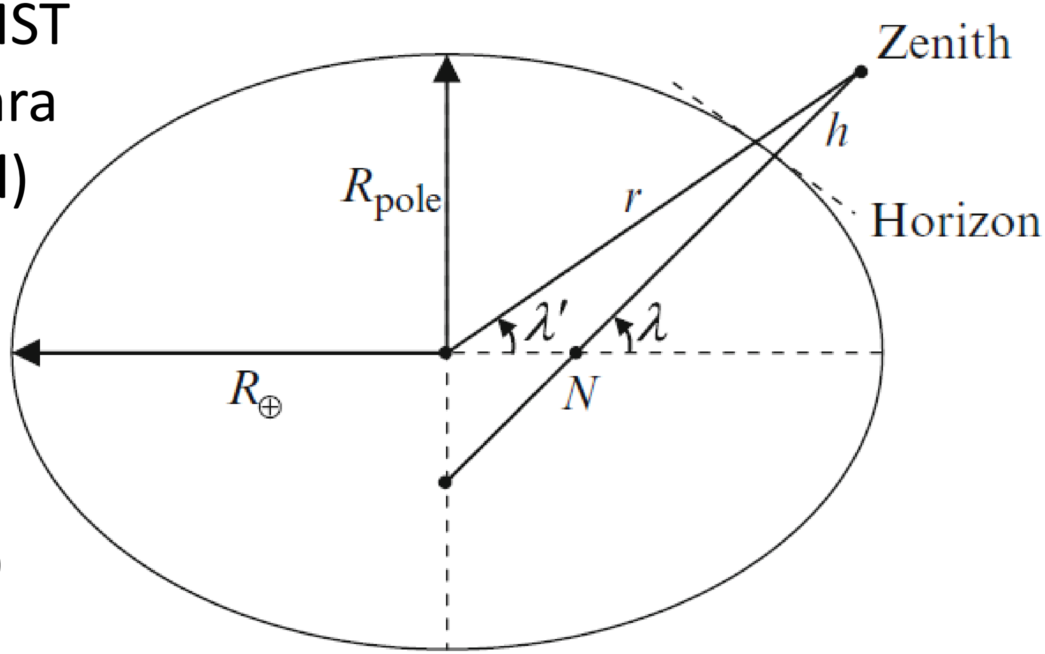
$$\boldsymbol{r_E} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A_{EI} r_I = \begin{bmatrix} \cos\theta_{GMST} & \sin\theta_{GMST} & 0 \\ -\sin\theta_{GMST} & \cos\theta_{GMST} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r_I$$



Kép forrása: [MARKLEY]

Inerciarendszerek – jellegzetes vonatkoztatási rendszerek

- Földközéppontú Földhöz rögzített rendszer
  - **Earth-Centered/Earth-Fixed (ECEF)** Frame – a GMST szög megállapításához szükség van a Julián dátumra (a számítás leírását lásd később, az időszámításnál)
  - A vektor megadható az abszolút értéke ($r = \|\boldsymbol{r_E}\| = \|\boldsymbol{r_I}\|$), a **földrajzi hosszúság ($\boldsymbol{\phi}$)** és a **geocentrikus szélesség ($\boldsymbol{\lambda}$')** segítségével
  - Szokás az alternatív **geodetikus szélesség ($\boldsymbol{\lambda}$)** használata is, amit a Föld geoid (forgási ellipszoid) alakjának kis tengelye, mint a Föld forgástengelye alapján számíthatunk
  - A geocentrikus hosszúság $\lambda' = \sin^{-1}\frac{z}{r}$ az egyenlítői sík és a Föld középpontja által bezárt szög



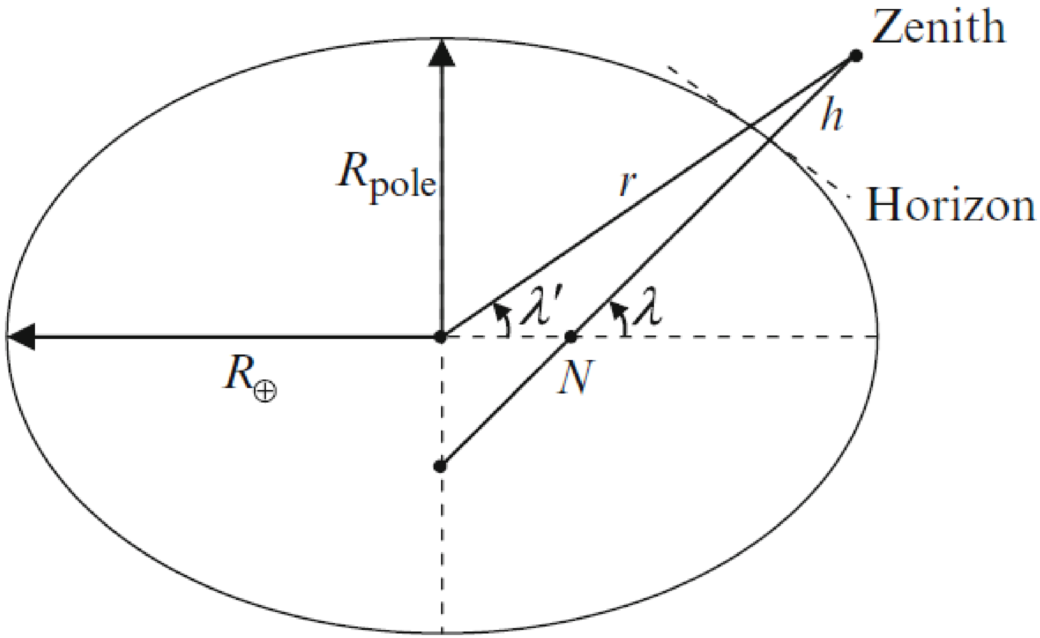
Kép forrása: [MARKLEY]

Inerciarendszerek – jellegzetes vonatkoztatási rendszerek

- Földközéppontú Földhöz rögzített rendszer
  - **Earth-Centered/Earth-Fixed (ECEF)** Frame
  - A geodetikus hosszúság λ az egyenlítői sík és a referencia ellipszoidra adott felületi pontban merőleges egyenes által bezárt szög
  - Az ellipszoid **lapultsága** az egyenlítői sugárból ($R_{\oplus}$) és a sarkoknál mért sugárból számítható ($R_{pólus}$):

$$f = \frac{R_{\oplus} - R_{pólus}}{R_{\oplus}}$$

  - Ekkor az ellipszoid excentricitása $e = \sqrt{f(2-f)}$
  - Számos referencia ellipszoid modell létezik, az egyik ilyen a World Geodetic System 1984, a WGS84.
  - Ebben $R_{\oplus} = 6378{,}137\ km$ $R_{pólus} = 6356{,}752\ km$ és $e = 0{,}0818$.



Kép forrása: [MARKLEY]

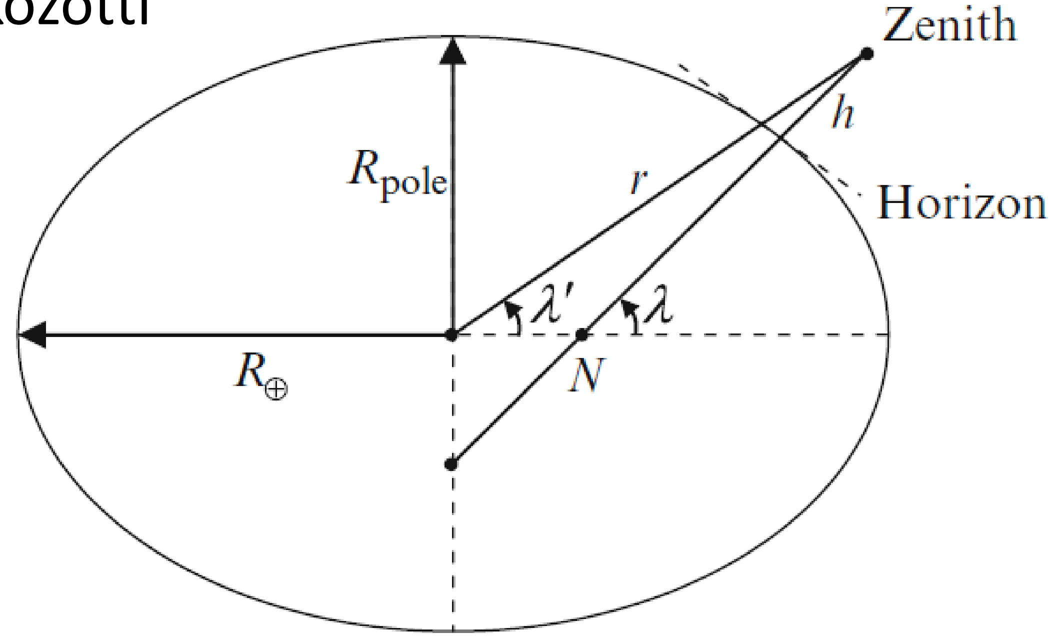
Inerciarendszerek – jellegzetes vonatkoztatási rendszerek

- Földközéppontú Földhöz rögzített rendszer
  - **Earth-Centered/Earth-Fixed (ECEF)** helyvektor meghatározása geodetikus koordináták alapján:
    - Először a z tengely és az ellipszoid normálisa közötti távolságot kell meghatározni:

$$N = \frac{R_{\oplus}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}}$$

    - Ezek után a három koordináta:

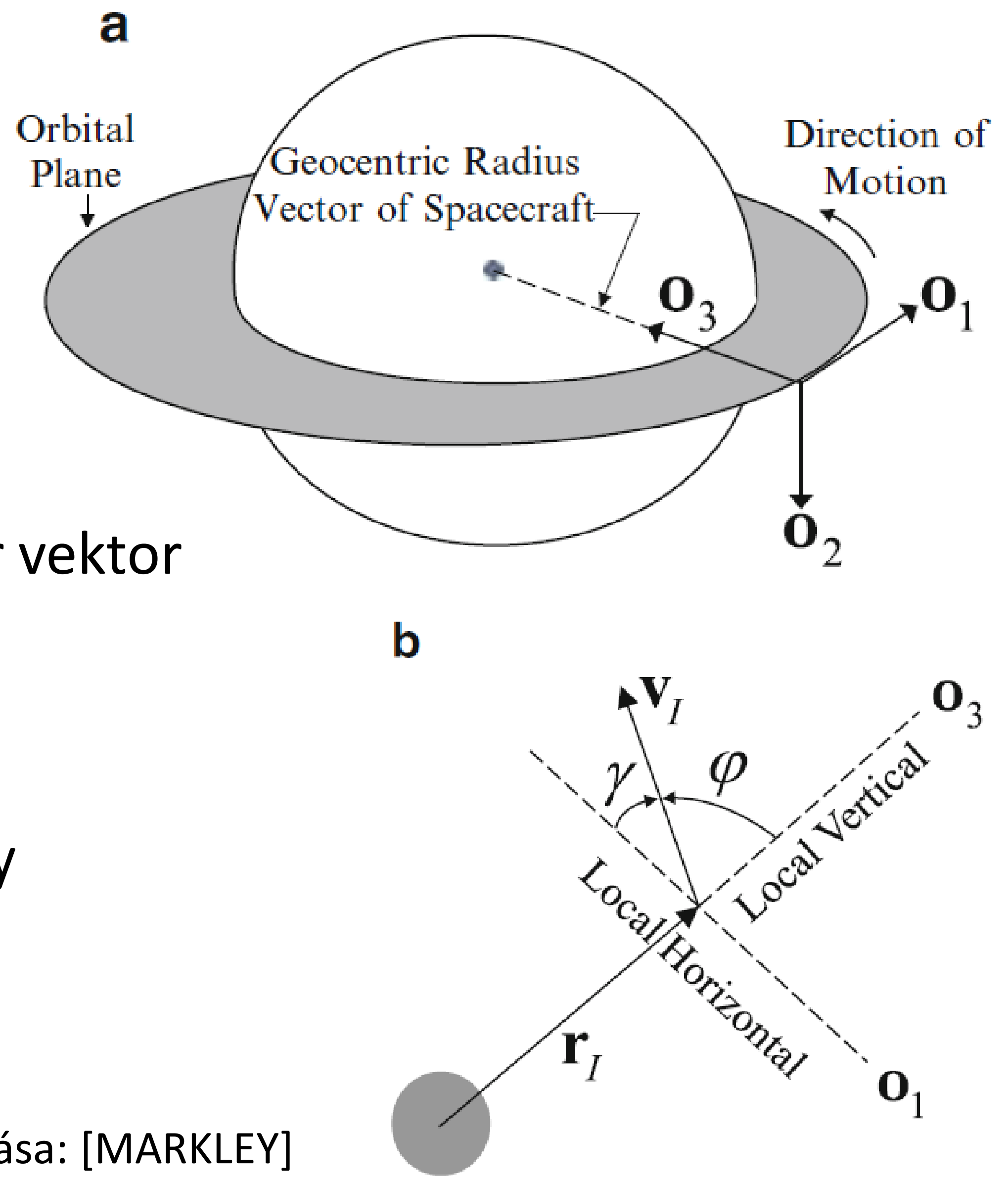
$$x = (N + h) \cos \lambda \cos \phi$$
$$y = (N + h) \cos \lambda \sin \phi$$
$$z = [N(1 - e^2) + h] \sin \lambda$$



Kép forrása: [MARKLEY]

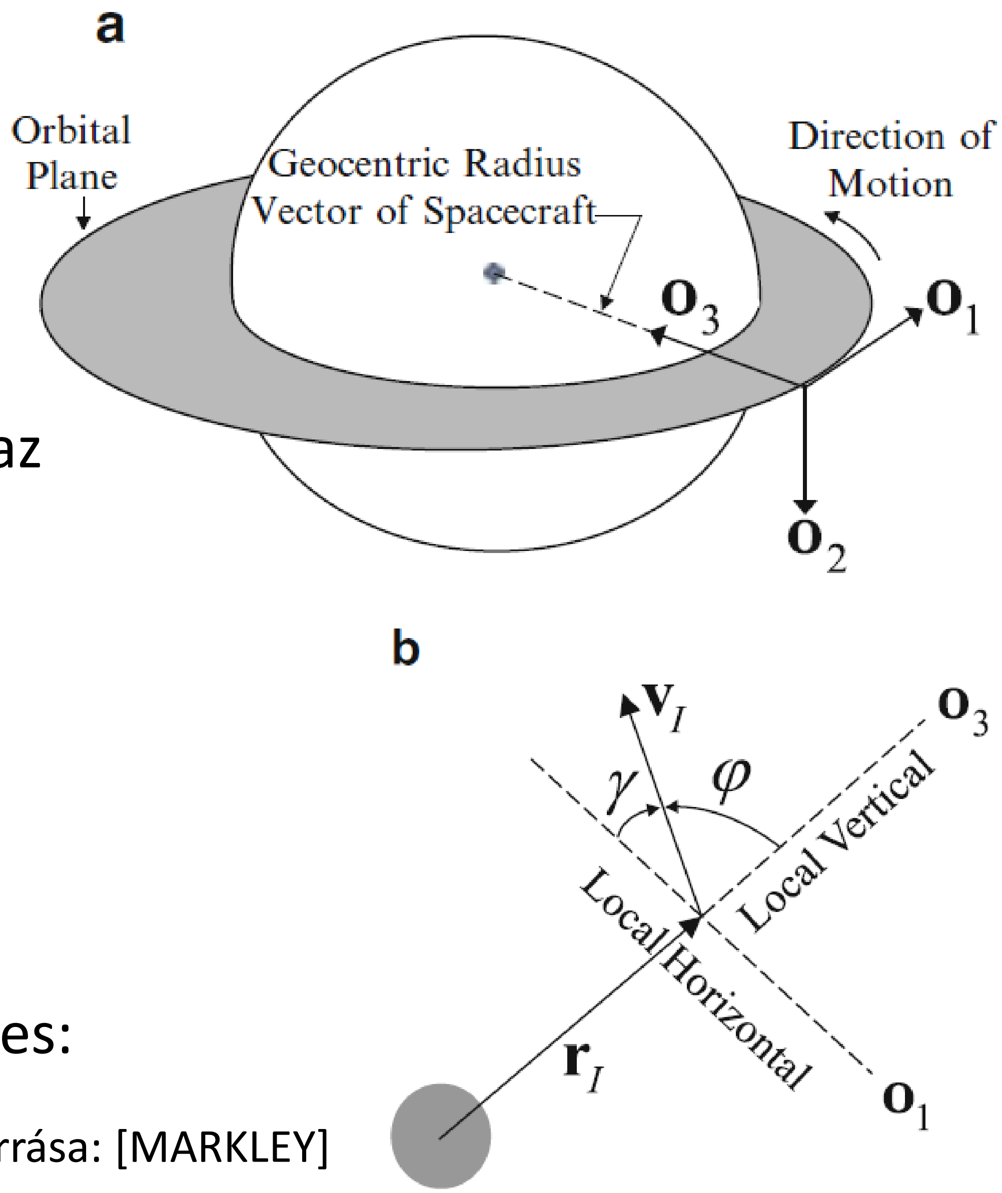
Inerciarendszerek – jellegzetes vonatkoztatási rendszerek

- Helyi függőleges / helyi vízszintes vonatkoztatási rendszer (LVLH)
  - Különösen a Föld felszíne felé irányított műholdak esetén érdekes ez a koordináta-rendszer
  - A z tengelye az űreszköz felől a (geocentrikus) nadír vektor mentén húzódik (**$\mathbf{o}_3$**)
  - Az y tengely a pályasík normálisának, ill. keringési szögsebesség vektorának ellentettje (**$\mathbf{o}_2$**)
  - Végül pedig az x tengely kiegészíti a jobbkéz-szabály értelmében (**$\mathbf{o}_1$**)



Kép forrása: [MARKLEY]

Inerciarendszerek – jellegzetes vonatkoztatási rendszerek



- Helyi függőleges / helyi vízszintes vonatkoztatási rendszer (LVLH)
  - Ezen vektorok átszámítása inerciális vonatkoztatási rendszerbe a következőképpen történhet ($\boldsymbol{r_I}$ és $\boldsymbol{v_I}$ az űreszköz pozíciója és sebessége):

$$\boldsymbol{o_{3I}} = -\frac{\boldsymbol{r_I}}{\|\boldsymbol{r_I}\|}$$

$$\boldsymbol{o_{2I}} = -\frac{(\boldsymbol{r_I} \times \boldsymbol{v_I})}{\|\boldsymbol{r_I} \times \boldsymbol{v_I}\|}$$

$$\boldsymbol{o_{1I}} = \boldsymbol{o_{2I}} \times \boldsymbol{o_{3I}}$$

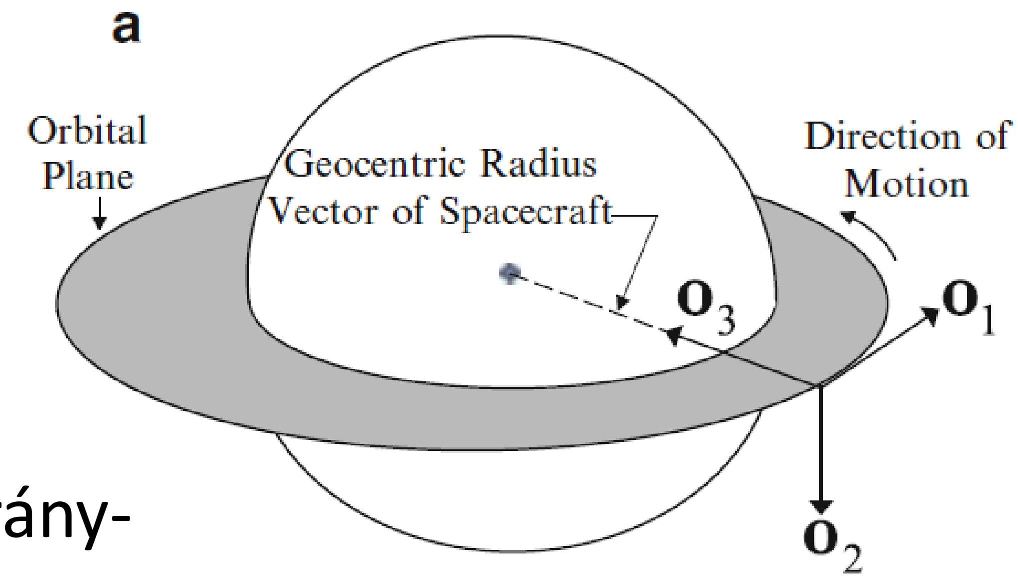
  - Az átszámítás tehát a következő mátrixszal lehetséges:

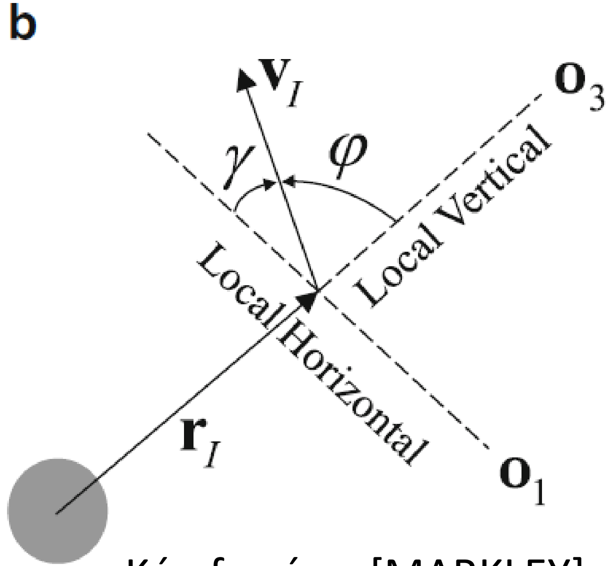
$$A_{IO} = [\boldsymbol{o_{1I}} \quad \boldsymbol{o_{2I}} \quad \boldsymbol{o_{3I}}]$$

Kép forrása: [MARKLEY]

Inerciarendszerek – jellegzetes vonatkoztatási rendszerek

- Helyi függőleges / helyi vízszintes vonatkoztatási rendszer (LVLH)
  - A sebességvektor és a helyi vízszintes sík ($\boldsymbol{o_{1I}} - \boldsymbol{o_{2I}}$) által bezárt szöget a repülési irányszögnek nevezzük, és γ-val jelöljük.
  - A fajlagos perdület $\boldsymbol{h_I} = \boldsymbol{r_I} \times \boldsymbol{v_I}$
  - A vektori szorzat értelmében $h = rv \sin\varphi$
  - Mivel $\gamma + \varphi = 90°$, a repülési irányszög $\cos\gamma = \frac{h}{rv}$
  - γ előjele megegyezik az $\boldsymbol{r_I} \cdot \boldsymbol{v_I}$ skaláris szorzatéval
  - Körpálya esetén $\boldsymbol{v_I} \parallel \boldsymbol{o_{1I}}$, $\gamma = 0°$, mert $\boldsymbol{r_I} \perp \boldsymbol{v_I}$





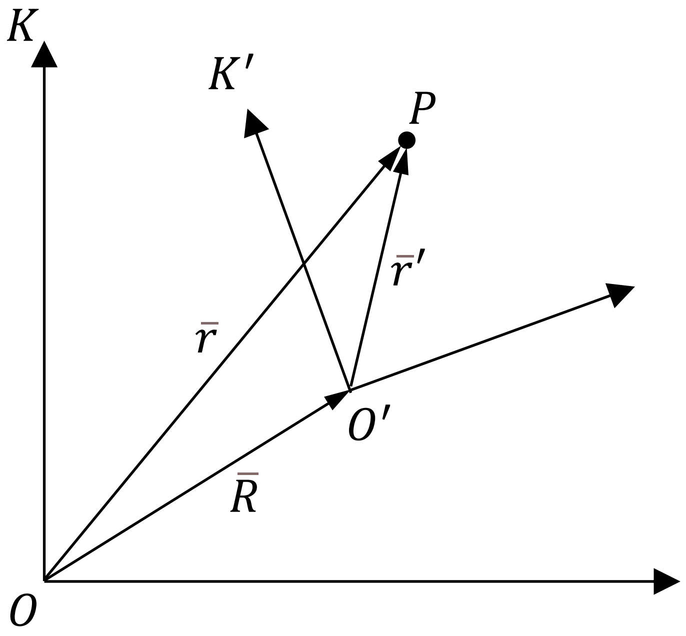
Kép forrása: [MARKLEY]

Forgó koordináta-rendszerek

- Egy forgó koordináta rendszer olyan koordináta rendszer, amely az inerciális referencia-rendszerhez képest forgó.
- Más szóval a koordináta-rendszer tengelyei forognak.
- Newton I. törvénye nem érvényes
- A forgó rendszerben elhelyezkedő megfigyelő fiktív gyorsulásokat és erőket tapasztal

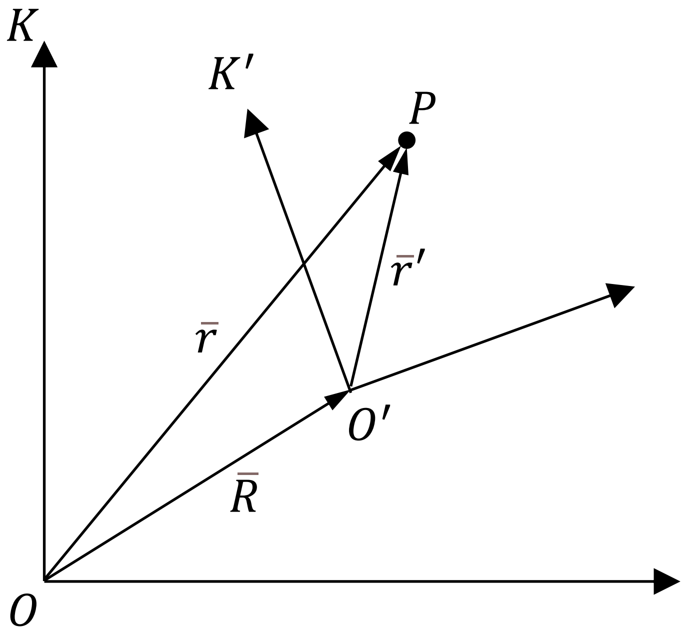
Forgó koordináta-rendszerek

- K rendszer inerciarendszer
- K’ rendszer a K rendszerhez képest forgó rendszer
- P pont helye K’-ben $\bar{r}'$
- P pont helye K-ban $\bar{r} = \bar{R} + \bar{r}'$

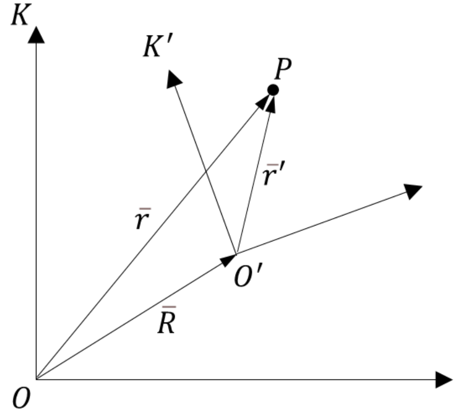


Forgó koordináta-rendszerek

- Sebesség a K-ban ülő megfigyelő szerint:
- $\dot{\bar{r}}^{(K)} = \dot{\bar{R}}^{(K)} + \dot{\bar{r}}'^{(K)}$
- $\bar{r}'$-nek nem csak a hossza, de K-ból nézve az iránya is változhat a forgás miatt
- $\bar{v} = \bar{V}_{o'} + \dot{\bar{r}}'^{(K')} + \bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{V}_{o'} + \bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{r}'$
- Ahol
  - $\bar{V}_{o'}$ a K' rendszer origójának sebessége
  - $\bar{v}'$ a P pont sebessége a K'-beli megfigyelő szerint
  - $\bar{\omega}$ a K' rendszer szögsebessége



Forgó koordináta-rendszerek



- gyorsulás a K-ban ülő megfigyelő szerint:

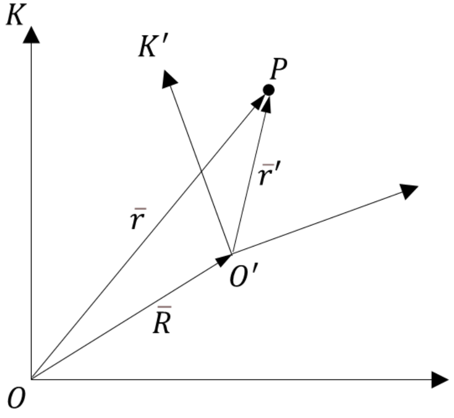
$$\dot{\bar{v}}^{(K)} = \dot{\bar{V}}_{o'} + \dot{\bar{v}}'^{(K)} + \dot{\bar{\omega}}^{(K)} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}'^{(K)}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_{0'} + \dot{\bar{v}}'^{(K')} + \bar{\omega} \times \bar{v}' + \dot{\bar{\omega}}^{(K)} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times \left(\dot{\bar{r}}'^{(K')} + \bar{\omega} \times \bar{r}' \right)$$

$$\bar{a} = \bar{a}_{0'} + \dot{\bar{v}}'^{(K')} + \bar{\omega} \times \bar{v}' + \dot{\bar{\omega}}^{(K)} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times \bar{v}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')$$

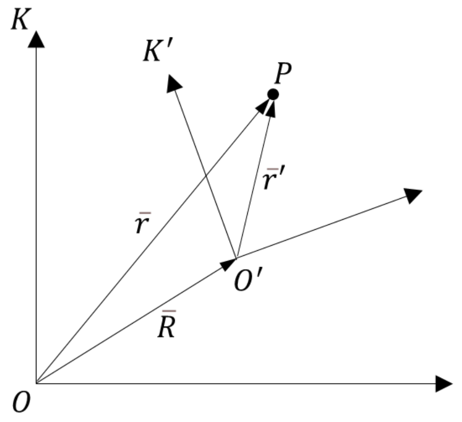
$$\bar{a} = \bar{a}_{0'} + \bar{a}' + 2 \cdot \bar{\omega} \times \bar{v}' + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')$$

Forgó koordináta-rendszerek

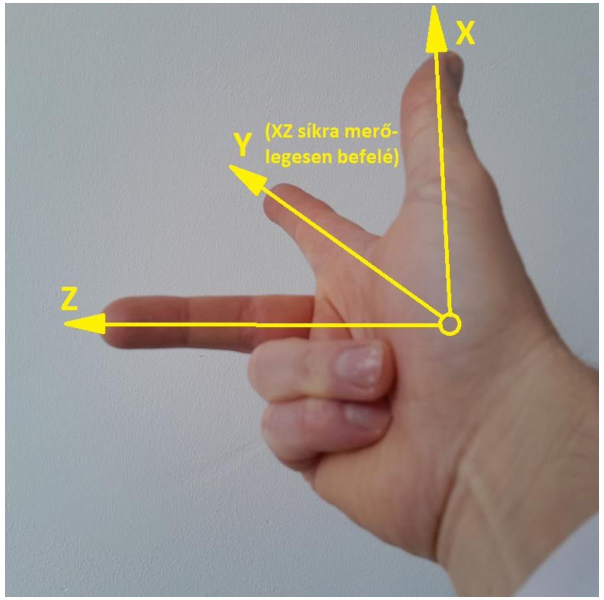


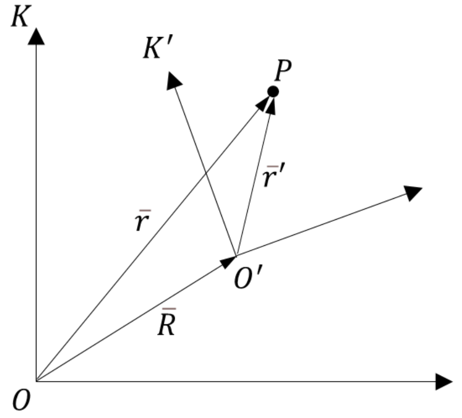
- gyorsulás a K-ban ülő megfigyelő szerint:
- $\bar{a} = \bar{a}_{0'} + \bar{a}' + 2 \cdot \bar{\omega} \times \bar{v}' + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')$
- Ahol:
  - $\bar{a}_{0'}$: K' rendszer gyorsulása K-ból nézve
  - $\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}$: Euler gyorsulás
  - $2 \cdot \bar{\omega} \times \bar{v}'$: coriolis gyorsulás
  - $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')$: centripetális gyorsulás

Forgó koordináta-rendszerek



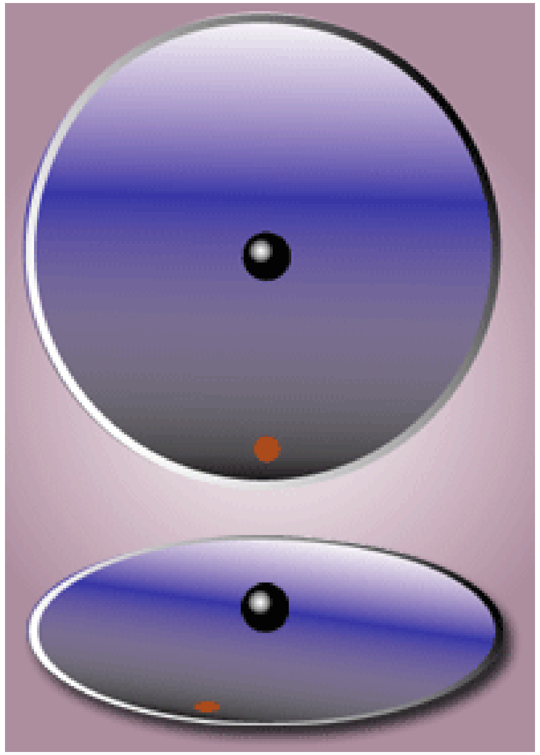
- $\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}$: Euler gyorsulás
  - Keresztirányú (azimutális) gyorsulás, a vonatkoztatási rendszer szögsebességének időbeli megváltozása hozza létre
  - Feltételezzük, hogy az ábrán látható K' koordináta-rendszer a rajz síkjára merőleges szögsebesség-vektor változást szenved
  - Ekkor a keresztszorzat értelmében a K rendszerbeli megfigyelő egy $\bar{r}$ -re és $\dot{\bar{\omega}}$ -ra is merőleges gyorsulásvektort fog látni





Forgó koordináta-rendszerek

- $2 \cdot \bar{\omega} \times \bar{v}'$: Coriolis gyorsulás
  - Bár már évszázadok óta ismert volt a hatás, csak az 1800-as évek közepe táján foglalta össze Coriolis
  - A Coriolis-erő hozza létre az inerciarendszerhez képest forgó (vagyis gyorsuló) vonatkoztatási rendszerben mozgó testen
  - Az erő nagysága arányos a forgó rendszer szögsebességével, a mozgó test sebességével, valamint a két vektor által bezárt szög szinuszával (a keresztszorzat okán)
  - Ez a gyorsulás okozza pl. az északi/déli szelek eltérülését a forgó Földgömbön és a ciklonok kialakulását

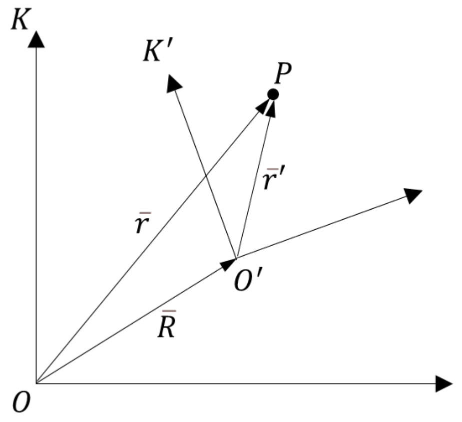


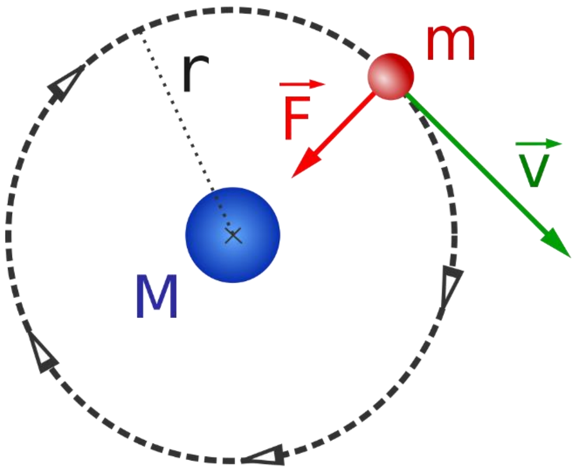
kép forrása: [CORIOLIS]

Forgó koordináta-rendszerek

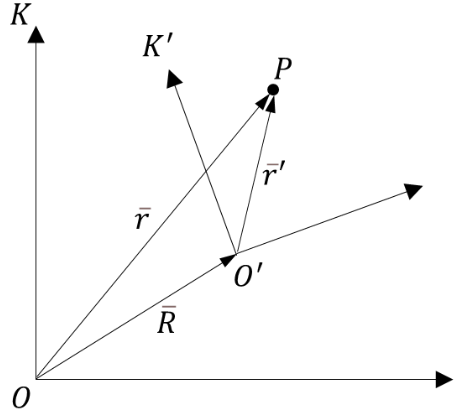
- $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')$: centripetális gyorsulás
  - Centrum + petere: középpont + keresni
  - Az az erő, amely hatására a test görbült pályát fog követni
  - Iránya mindig merőleges a test mozgására és a pálya görbületének középpontja felé mutat
  - Nagysága a szögsebesség négyzetének és a pályasugárnak szorzataként adódik: $a_c = \omega^2 r$
  - Figyelembe véve, hogy a szögsebesség és a pályasugár szorzata éppen a *v* kerületi sebességgel egyenlő, a centripetális gyorsulás leírható a következőképpen is: $v = \omega r \to a_c = \frac{v^2}{r}$
  - A szögsebesség másik oldalról a T periódusidővel is felírható, ebből behelyettesítéssel megkapható:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \to a_c = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$





Forgó koordináta-rendszerek



- Mivel K-t inerciarendszernek tekintjük ezért $\bar{F} = m \cdot \bar{a}$

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}_{0'} + m \cdot \bar{a}' + m \cdot 2 \cdot \bar{\omega} \times \bar{v}' + m \cdot \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + m \cdot \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')$$

- Ha K-ban és K’-ben ugyanakkora a P pont tömege (m), akkor az erők a K’-ben ülő megfigyelő szerint:

$$m \cdot \bar{a}' = \bar{F} - \underbrace{m \cdot \bar{a}_{0'} - \underbrace{m \cdot 2 \cdot \bar{\omega} \times \bar{v}'}_{\text{Coriolis erő}} - \underbrace{m \cdot \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}'}_{\text{Centrifugális erő}} - \underbrace{m \cdot \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')}_{\text{Euler erő}}}_{\text{Tehetetlenségi és inercia erők}}$$

Időmérés

- Sokáig azt gondolták, hogy létezik univerzális időmérés, és egy lineárisan növekvő skalárnak lehet felfogni
- Az időmérés rendszerének alapelemei:
  - Az állandó időtartam alapegysége
  - És a nulla időpont, vagyis epocha
- Az égi mechanikában háromféle időmérési rendszert szokás alkalmazni:
  - **Univerzális (világ-) idő**, ami figyelembe veszi a Föld forgását és keringését és általánosságban ez a független változó a mérésekben
  - **Sziderikus idő**: a tavaszponthoz képesti elfordulás mértékét adja meg, egy földi megfigyelő tájékozódását szolgálja az égbolt koordináta-rendszerében
  - **Efemerisz idő** (vagy más néven **dinamikus idő**): a pályaszámítások független változója, ami mesterséges vagy természetes űrobjektum égbolt koordináta-rendszerben történő behatárolására szolgál

Időmérés – atomi idő

- Alapegysége az SI másodperc, ami a Ce-133 atom 9.192.631.770 periódusának idejével egyezik
- Ezt úgy határozták meg, hogy a korábbi efemerisz idő alapegységével megegyezzék
- Jelenlegi felfogásunk alapján a másodperc egy fix hosszúsággal rendelkezik.
- Ennek ellenére az atomi idő meghatározásához mérésre van szükség, és relativisztikus korrekciókra is szükség van a Földön található mérések kiértékeléséhez
- International Atomic Time (Temps Atomique International, TAI)

Időmérés – dinamikus idő

- A bolygómozgások egyenleteiben a független változó a dinamikus idő
- A relativitás elmélete szerint ez az érték függ a vonatkoztatási rendszertől és a választott elmélettől (spec. vagy általános)
- A periodikus jelenségek csökkentésére a vonatkoztatási rendszer alapjául a Naprendszer baricentrumát szokás választani (Barycentric Dynamical Time, TDB).
- Emellett létezik még a földi dinamikus idő (Terrestrial Dynamic Time), amely egy elméletileg összeállított időskála a látható geocentrikus naprendszerbeli égitestek efemeriszei alapján
- Más rendszerekre vonatkoztatott dinamikus idő ezek után transzformációkkal nyerhető

Időmérés – efemerisz idő (ephemeris time, ET)

- A newtoni mozgás- és tömegvonzás törvények független változója
- Egységes időskála, és a Naprendszer égitestjeinek megfigyelésén alapul
- Három különböző formája létezik (ET0, ET1 és ET2), mindegyik egyre bonyolultabb Hold-mozgást feltételez
- Az ET és UTC között nincs ütembeli különbség, de epochájuk eltér egymástól
- Habár az ET-ot formálisan felváltotta a dinamikus idő, gyakran használják egymás szinonimájaként ezeket

Időmérés – Julián dátum

- Egy egyszerű folyamatos skála a napok számlálására
- A kezdő időpont Kr. e. 4713 január 1-e (Julián naptár szerint, nov. 24. Gregorián naptár szerint) dél volt (GMT szerinti idő)
- Julián dátumokat UT-ben vagy dinamikus időben szokás megadni
- Égi koordináta-rendszerekben az epocha TDB-ben (baricentrikus dinamikus időben) van definiálva
- A Julián-naptár szerint az évszázad hossza 36525 nap (nem 1-el rövidebb), emiatt átváltó képletek szükségesek a Gregorián-naptárbeli dátumokra
- A gyakorlatban használják még a módosított Julián dátumot (MJD), amely JD –ből 2.400.000,5–et levonva kapható → emiatt az MJD éjfélkor kezdődik!

Időmérés – Julián dátum

- Ahogy a geocentrikus/Földhöz rögzített koordináta-rendszerben láttuk, a Greenwichi Sziderikus Középidő (GMST) számításához a Julián dátumra van szükségünk.
- Ha adott a kérdéses időpontunk *Y* év, *M* hónap, *D* nap, *h* óra, *m* perc és *s* másodperc, az ennek megfelelő Julián dátum:

$$JD(Y,M,D,h,m,s) = 1\,721\,013{,}5 + 367Y - INT\left\{\frac{7}{4}\left[Y + INT\left(\frac{M+9}{12}\right)\right]\right\}$$

$$+INT\left(\frac{275M}{9}\right) + D + \frac{60h + m + \frac{s}{60^{*}}}{1440}$$

* Szökőmásodperc esetén 61

Időmérés – Julián dátum

- Ezek után meg kell határozni a J2000.0 dátumtól eltelt Julián évszázadok számát:

$$T_0 = \frac{JD(Y, M, D, 0,0,0) - 2\,451\,545}{36\,525}$$

- A geocentrikus inerciális vonatkoztatási rendszerben az állócsillagokhoz képest tájékozódunk, nem a Naphoz képest, ezért a GMST sziderikus és nem szoláris idő.
- Sziderikus nap egy állócsillag adott délkörön két egymás után való áthaladása között eltelt idő, kb. 3 perc 56 másodperccel rövidebb, mint a szoláris nap: 86164 másodperc.

Időmérés – Julián dátum

- Végül meghatározhatjuk a GMST szögét másodpercben:

$$\theta_{GMST} = 24\,110{,}54841 + 8\,640\,184{,}812866T_0 + 0{,}093104T_0^2$$
$$-6.2 \cdot 10^{-6}T_0^3 + 1{,}00273790935(3600h + 60m + s)$$

- Ha megvan az érték, 86400 egész számú többszörösét ki kell vonni belőle (vagy esetleg hozzá kell adni), majd elosztunk 240-nel, mert egy másodperc 1/240°

Időmérés – Sziderikus idő

- Definíció szerint a **tavaszponthoz képesti óraszög**, vagyis a tavaszpontot és a Föld tömegközéppontját összekötő egyenes és a megfigyelő meridiánja közötti szög, kelet felé mérve
- Ezáltal a sziderikus idő a Föld napi körülfordulásának a mértéke
- **Látszólagos sziderikus idő** – a valódi napéjegyenlőség alapján (valódi egyenlítő és valódi ekliptika az adott időpontban, ebben benne van a tavaszpont nutációja és ezért periodikus egyenlőtlenségek tapasztalhatóak benne)
- Közepes sziderikus idő – a tavaszpont közepes irányához képest mér, emiatt annak csak a precessziója van benne és emiatt évszázados egyenlőtlenségek vannak csupán

Galilei-transzformáció - Bevezetés

- Legyen K és K’ inercia rendszerek
- Ezért az egyikben elhelyezett egyenes vonalú, egyenletes mozgást végző test a másikban is egyenes vonalú, egyenletes mozgást kell végezzen (pl. x tengely mentén)
- Ezért a transzformáció lineáris:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

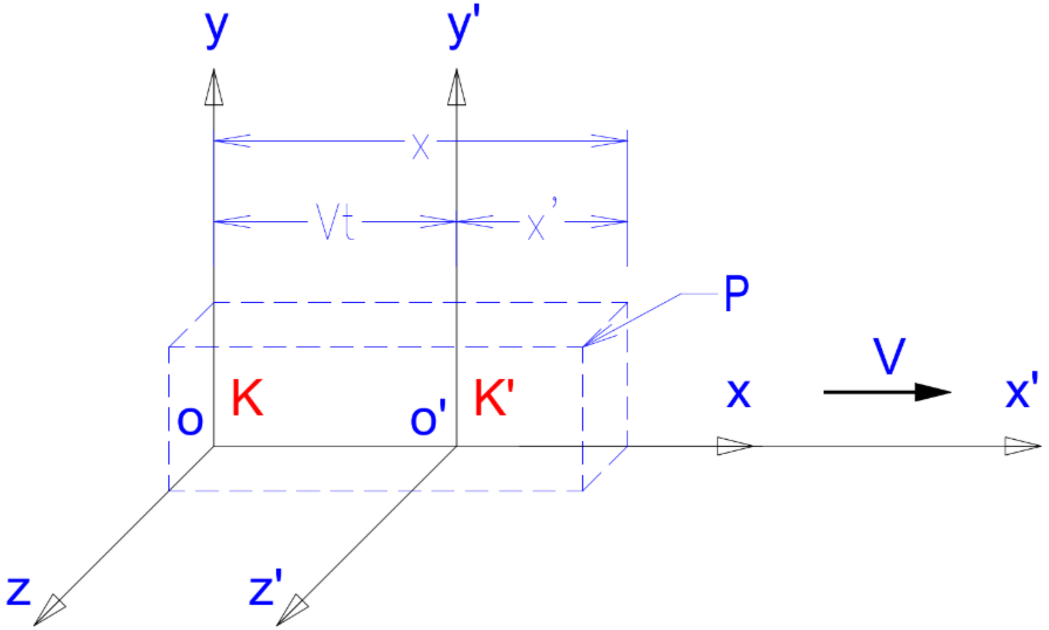
- A lineáris transzformációt nevezzük boostnak

Galilei-transzformáció - Bevezetés

- K’ a K-ban egyenes vonalú *v* sebességű egyenletes mozgást végez
- K’-ből nézve K rendszer –*v* sebességű egyenletes mozgást végez
- K origójának mozgása

$$\begin{pmatrix} t' \\ -vt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} t' &= \gamma t \\ -vt' &= \beta t \end{aligned}\right\} -v\gamma = \beta$$



Forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/Galilei-transzform%C3%A1ci%C3%B3

Galilei-transzformáció - Bevezetés

- K' origójának mozgása

$$\begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ vt' \end{pmatrix}$$

$$0 = \beta t + \alpha v t$$

$$-v\alpha = \beta$$

- K origójának mozgásából kaptuk

$$-v\gamma = \beta$$

$$\alpha = \gamma$$

Galilei-transzformáció - Bevezetés

- Használjuk fel az origók mozgásából kapott feltételeket

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$-v\gamma = \beta \qquad \alpha = \gamma$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -v\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

- Így már csak két paraméter maradt a transzformációban

Galilei-transzformáció - Bevezetés

- Ha a K’ rendszer *v* sebességgel mozog a K rendszerhez képest, akkor K rendszer –*v* sebességgel mozog K rendszerhez képest.
- Az inverz transzformáció két módon állhat elő. A transzformációs mátrix inverzeként és a $\gamma(-v)$, $\delta(-v)$ paraméterekkel:

$$\frac{1}{\gamma^2(v)+v\gamma(v)\delta(v)}\begin{pmatrix}\gamma(v) & -\delta(v)\\ v\gamma(v) & \gamma(v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma(-v) & \delta(-v)\\ v\gamma(-v) & \gamma(-v)\end{pmatrix}$$

- Belátható, hogy a transzformáció determinánsa 1 kell legyen, és $\gamma(v) = \gamma(-v)$ és $-\delta(v) = \delta(-v)$

Galilei-transzformáció - Bevezetés

- Két lineáris transzformációt elvégezve eredményként egy lineáris transzformációt kapunk.

$$\begin{pmatrix} \gamma(v') & \delta(v') \\ -v'\gamma(v') & \gamma(v') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(v) & \delta(v) \\ -v\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v+v') & -\delta(v+v') \\ -v\gamma(v+v') & \gamma(v+v') \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma(v')\gamma(v) - v\gamma(v)\delta(v') & \gamma(v')\delta(v) + \delta(v')\gamma(v) \\ -(v'+v)\gamma(v)\gamma(v') & -v'\gamma(v')\delta(v) + \gamma(v')\gamma(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v+v') & \delta(v+v') \\ -v\gamma(v+v') & \gamma(v+v') \end{pmatrix}$$

- Mivel az új transzformáció szerkezetileg meg kell egyezzen a korábbi transzformációval, így megállapítható, hogy a szorzatmátrix főátlóban lévő elemeinek meg kell egyezniük

$$\gamma(v')\gamma(v) - v\gamma(v)\delta(v') = -v'\gamma(v')\delta(v) + \gamma(v')\gamma(v)$$

Galilei-transzformáció - Bevezetés

$$\gamma(v')\gamma(v) - v\gamma(v)\delta(v') = -v'\gamma(v')\delta(v) + \gamma(v')\gamma(v)$$

- Átalakítást követően $\frac{\delta(v)}{v\gamma(v)} = \frac{\delta(v')}{v'\gamma(v')} = áll.$, azaz $\frac{\delta}{v\gamma} = k$
- Kifejezhetjük a transzformáció determinánsát a kapott *k* állandó segítségével.

$$1 = \gamma^2 + v\gamma\delta = \gamma^2(1 + kv^2)$$

- Ezekből egy általános transzformáció írható fel

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + kv^2}} \begin{pmatrix} 1 & kv \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Galilei-transzformáció - Bevezetés

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+kv^2}} \begin{pmatrix} 1 & kv \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

- $k = 0$ esetben

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

- Azaz $t' = t$ és $x' = x - vt$, ami nem más, mint a Galilei transzformáció

Galilei-transzformáció

- A mechanika törvényei azonosak az egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerekben.
- A Galilei transzformáció két inerciarendszer hely- és időkoordinátái között létesít kapcsolatot.

$$r' = r - vt$$

$$t' = t$$

- Minden rendszerben egyenletesen telik az idő

Galilei-transzformáció

- Sebességek:

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{dr}{dt} - v$$

- Ahol $V' = \frac{dr'}{dt}$ és $V = \frac{dr}{dt}$-t behelyettesítve:

$$V' = V - v$$

- *Galilei-féle sebesség-összeadási törvény:* a hétköznapi tapasztalattal összhangban helyesen írja le azt a tényt, hogy a testek sebessége függ attól, milyen vonatkoztatási rendszerből nézzük.

- Általában azokat a fizikai mennyiségeket, amelyek értéke függ a megfigyelő vonatkoztatási rendszerétől, relatívnak nevezzük, azokat pedig, amelyek attól függetlenek, abszolútnak tekintjük.

Galilei-transzformáció

- Gyorsulások:

$$\frac{dV'}{dt} = \frac{dV}{dt} - \frac{dv}{dt}$$

- mivel $v = áll.$, $a = \frac{dV}{dt}$ és $a' = \frac{dV\prime}{dt}$, ezért

$$a' = a$$

Galilei-transzformáció

- Newtoni mozgástörvény:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F$$

$$m\frac{d^2(r' + vt)}{dt^2} = F'$$

$$m\frac{d^2r'}{dt^2} = m\frac{d^2r'}{dt'^2} = F'$$

- A törvény alakja ugyanolyan a két rendszerben, ezt **kovarianciának** nevezzük, tehát a klasszikus mechanika mozgásegyenleteinek alakja változatlan, invariáns a Galilei-transzformációval szemben - *Galilei-féle relativitási elv*

Speciális relativitáselmélet

- A speciális relativitáselméletet Albert Einstein dolgozta ki 1905-ben, miután a Maxwell-egyenletek és a newtoni mechanika közötti ellentmondás és a Michelson-Morley kísérlet gyakorlati lökést adott számára
- Kiterjesztette a klasszikus mechanikát a fényhez közeli (relativisztikus) nagy sebességek tartományára
- Kellően kis (földi mindennapi) sebességek esetén a newtoni modell továbbra is érvényes, és pontos marad
- Kapcsolatot teremt a tér és idő között, felveti az egységes téridő modelljét

Speciális relativitáselmélet

- Két posztulátumra (feltevés, követelmény) támaszkodik:
    1. A fizika törvényei minden inerciarendszerben azonosak (invariancia)
    2. A fény sebessége a vákuumban minden megfigyelő számára azonos, függetlenül a fényforrás vagy a megfigyelő mozgásától
- Számos következményét kísérleti úton sikerült bizonyítani:
    - Hossz kontrakció és idődilatáció
    - Relativisztikus sebesség-összeadás képlete
    - Az egyidejűség relativisztikussága
    - Relativisztikus tömeg
    - Egyetemes határsebesség
    - Tömeg-energia egyenértékűség

Tömeg-energia ekvivalencia

- Einstein híres $E = mc^2$ egyenlete a spec. relativitáselmélet következménye
- Kifejezi, hogy a (nyugalmi) tömeg és az energia arányosak egymással, az arányossági tényező a fénysebesség négyzete
- Ez az ún. nyugalmi energia, amivel minden tömeggel rendelkező részecske bír
- Pl. maghasadáskor a keletkező részecskék össztömege kevesebb lesz, mint a kiinduló részecske tömege, a kettő különbsége takarja azt az energiát, ami felszabadult
- A Nap elektromágneses sugárzás útján $3{,}7 \cdot 10^{26}$ W energiát veszít, ez átszámítva 4 millió tonna ($4 \cdot 10^9$ kg), de teljes tömege $2 \cdot 10^{30}$ kg, tehát $5 \cdot 10^{20}$ s (kb. 13 billió év) alatt fogyna el (ha egyéb változások nem következnének be)

Tömeg-energia ekvivalencia

- Érdekes megnyilvánulása ennek a jelenségnek az úgynevezett tömeg-deficiencia (hiány), ami a kötésben lévő atomok és a szabad atomok között mérhető (a kötési energiával egyenértékű tömeg hiánya)
- Bármilyen energiával rendelkező test tömege nagyobb, mint a nyugalmi tömege, bár ez a gyakorlatban nem érzékelhető
  - $\frac{E}{m} = c^2 \approx \left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2 = 9 \cdot 10^{16} \frac{J}{kg}$ a fajlagos nyugalmi energia (vagyis 1 kg tömegé)
  - Ehhez képest pl. egy ugyanilyen tömegű víz 1 fokkal való hevítése kb. $4{,}2 \cdot 10^3$ J/kg energiát igényel, vagyis az arány közel 10^{-12} nagyságrendű

Tömeg-energia ekvivalencia

- Következményei:
  - Relativisztikus kinetikai energia:

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

  - Relativisztikus tömeg:

$$m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Lorentz-transzformáció

- Albert Michelson és Edward Morley 1887-ben végrehajtott kísérletükben úgy találták, hogy a fény terjedési sebessége minden inerciarendszerben ugyanaz. Ezek szerint a fény K és K' rendszerben *ct* és *ct'* utat tesz meg, ha feltételezzük, hogy kezdetben mindkét referencia rendszer origója egy pontban volt.

$$\begin{pmatrix} t' \\ ct' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+kv^2}} \begin{pmatrix} 1 & kv \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ ct \end{pmatrix}$$

- ahol *c* a fény terjedési sebessége.

Lorentz-transzformáció

- $\sqrt{1+kv^2}t' = t + cvkt$, $\sqrt{1+kv^2}ct' = -tv + ct$
- Ebből adódik, hogy $k = \frac{1}{c^2}$, behelyettesítve a Lorentz transzformációt kapjuk

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{ és } x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Lorentz-transzformáció

- Levonható fontosabb következtetések:
  - A fénysebesség minden test határsebessége (az alapfeltevés csak a fénysebesség állandóságát mondta ki), ui. ha $v \geq c$, akkor fizikailag értelmetlen eredményt kapnánk, éspedig:
  - ha $v > c$, imaginárius számot,
  - ha pedig $v = c$, határozatlan mennyiséget.
- Ennek az a tapasztalattal is összhangban álló fizikai tartalma, hogy semmilyen fizikai hatás nem terjedhet a fénysebességnél nagyobb sebességgel.

Lorentz-transzformáció

- Ha egy v sebességgel haladó test előrefelé egy a testhez képest w sebességgel mozgó tárgyat bocsát ki, akkor ennek a tárgynak egy álló inerciarendszerbeli megfigyelő által érzékelhető sebessége:

$$u = \frac{v + w}{1 + \frac{w \cdot v}{c^2}}$$

- Ez mindig a fény sebességénél kisebb (vagy szélsőséges esetben egyenlő) nagyságú eredményt szolgáltat.

Lorentz-transzformáció

- Szélsőséges példa: v = w = c, vagyis a rendszer is fénysebességgel halad, és így kibocsát magából előrefelé egy fotont a rendszerből szemlélve fénysebességgel.
- Azt gondolhatnánk a klasszikus mechanika alapján, hogy ez a foton 2c sebességre tesz szert.
- Nem éppen ez adódik a Lorentz-transzformációval:

$$u = \frac{v+w}{1+\frac{w \cdot v}{c^2}} \xrightarrow{v=w=c} \frac{2c}{1+\frac{c^2}{c^2}} = \frac{2c}{2} = c$$

- Ha egy galaxis fél fénysebességgel halad felénk és belőle fotonok érkeznek:

$$u = \frac{v+w}{1+\frac{w \cdot v}{c^2}} \xrightarrow{v=\frac{c}{2};w=c} \frac{1{,}5c}{1+\frac{0{,}5c^2}{c^2}} = \frac{1{,}5c}{1{,}5} = c$$

A z_C általánosítása

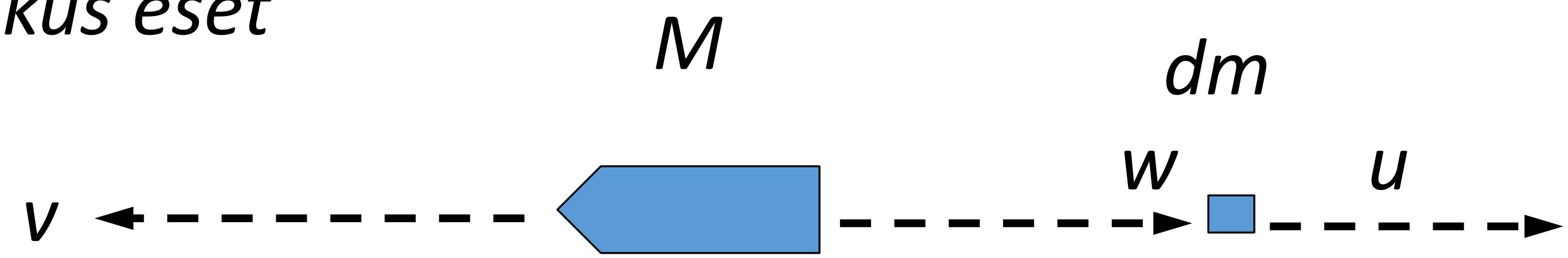
- A klasszikus felfogásban az *M* tömegű rakéta kibocsát egy *dm* elemi tömegű hajtóanyagot a rakétához képest *w* sebességgel.
- A közös tömegközépponthoz viszonyítva a rakéta sebessége *v* lesz, míg a távozó hajtóanyagé *u*.
- A relativisztikus esetben a tömegek helyett a Lorentz-transzformáció által meghatározott értéket kell behelyettesíteni:

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A z_C általánosítása

- Így tehát a klasszikus és relativisztikus esetben a következőképpen alakulnak a tömegek:

Klasszikus eset



Relativisztikus eset

$$M' = \frac{M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad dm' = \frac{dm}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

A z_C általánosítása

- Az egyenes vonalú mozgásból származó impulzus megmaradása alapján az *M* tömegű és *v* sebességű rakéta *d(Mv)* impulzus-változása egyenlő kell legyen a kibocsátott *dm* tömegű és *u* sebességű hajtóanyag *u·dm* impulzus-változásával:

Klasszikus eset

$$d(Mv) = u \cdot dm$$

Relativisztikus eset

$$d\left(\frac{M}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot v\right) = u \cdot \frac{dM}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

A z_C általánosítása

- A tömeg állandóságából kapjuk (relativisztikus esetben az energia-tömeg állandóságából):

Klasszikus eset

$$dM = -dm$$

Relativisztikus eset

$$d\left(\frac{M}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot c^2\right) = -\frac{dm}{\sqrt{1-u^2/c^2}}c^2$$

- A sebességek alakulása (lásd Lorentz-transzformáció):

$$u = w - v$$

$$u = \frac{w-v}{1-(wv)/c^2}$$

A z_C általánosítása

- Helyettesítsünk be az impulzus egyenletbe az előző kettő alapján:

Klasszikus eset

$$d(Mv) = (v - w)dM$$

Relativisztikus eset

$$d\left(\frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \frac{v - w}{1 - (v \cdot w)/c^2} d\left(\frac{M}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

- A deriváltak kifejezhetőek a jól ismert képlet alapján:

$$d(ABC) = ABdC + ACdB + BCdA$$

A z_C általánosítása

- A relativisztikus esetben a nevezők deriváltja:

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\frac{vdv}{\left(c^2-v^2\right)\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

- Feltéve, hogy a fénysebességet nem érjük el, a nevező gyökös tagjával mindent végigszorozva egyszerűsíthetünk.

Klasszikus eset

$$Mdv+vdM=\left(v-w\right)dM$$

Relativisztikus eset

$$Mdv+vdM+\frac{Mv^2dv}{c^2-v^2}=\frac{v-w}{1-\left(v\cdot w\right)/c^2}\left(dM+\frac{Mvdv}{c^2-v^2}\right)$$

A z_C általánosítása

- Rendezzük az egyenleteket:

Klasszikus eset

$$wdM = -Mdv$$

Relativisztikus eset

$$\left(v-\frac{v-w}{1-(v\cdot w)/c^2}\right)dM = -\left[M+\frac{Mv}{c^2-v^2}\left(\frac{v-w}{1-(v\cdot w)/c^2}\right)\right]dv$$

- Válasszuk szét a változókat:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dv}{w}$$

$$\frac{dM}{M} = -\frac{\left[1+\frac{v}{c^2-v^2}\left(v-\frac{v-w}{1-(v\cdot w)/c^2}\right)\right]}{\left(v-\frac{v-w}{1-(v\cdot w)/c^2}\right)}dv$$

A z_C általánosítása

- Egyszerűsítsük a relativisztikus formula törtjét, vezessük be a következő jelölést:

$$\left(v-\frac{v-w}{1-(v\cdot w)/c^2}\right)=x$$

- Ezzel az előző egyenletünk:

$$\frac{dM}{M}=-\frac{1+\frac{v}{c^2-v^2}x}{x}dv$$

- Mivel közös nevezőn vannak:

$$\frac{dM}{M}=-\left(\frac{1}{x}+\frac{v}{c^2-v^2}\right)dv$$

- Fejezzük ki *x* reciprokát:

$$\frac{1}{x}=1\bigg/\left(v-\frac{v-w}{1-(v\cdot w)/c^2}\right)=1\bigg/\left[\frac{v\left(1-(v\cdot w)/c^2\right)}{1-(v\cdot w)/c^2}-\frac{v-w}{1-(v\cdot w)/c^2}\right]$$

A z_C általánosítása

- Fejezzük ki *x* reciprokát:

$$\frac{1}{x} = \frac{1-(v\cdot w)/c^2}{(v-(v^2\cdot w)/c^2)-(v-w)} = \frac{1-(v\cdot w)/c^2}{w-(v^2\cdot w)/c^2} = \frac{1-(v\cdot w)/c^2}{w(1-v^2/c^2)} = \frac{c^2-v\cdot w}{w(c^2-v^2)}$$

- Ezt helyettesítsük be, majd hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{dM}{M} = -\left(\frac{c^2-v\cdot w}{w\left(c^2-v^2\right)} + \frac{v}{c^2-v^2}\right)dv = -\left(\frac{c^2-v\cdot w}{w\left(c^2-v^2\right)} + \frac{v\cdot w}{w\left(c^2-v^2\right)}\right)dv$$

A z_C általánosítása

- Innen már csak egy lépés a relativisztikus, egyszerűsített tömegviszony egyenlet:

$$\frac{dM}{M} = -\left(\frac{c^2 - v \cdot w}{w\left(c^2 - v^2\right)} + \frac{v \cdot w}{w\left(c^2 - v^2\right)} \right) dv = -\left(\frac{c^2}{w\left(c^2 - v^2\right)} \right) dv = -\frac{dv}{w\left(1 - v^2/c^2\right)}$$

Klasszikus eset

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dv}{w}$$

Relativisztikus eset

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dv}{w\left(1 - v^2/c^2\right)}$$

- Mint látható, ezen a ponton egész hasonló alakú egyenletek adódtak.

A z_C általánosítása

- Végezzük el az integrálást a kezdő M_0 és a tetszőleges M végtömeg között:

Klasszikus eset

$$\ln\frac{M_0}{M}=\frac{v}{w}$$

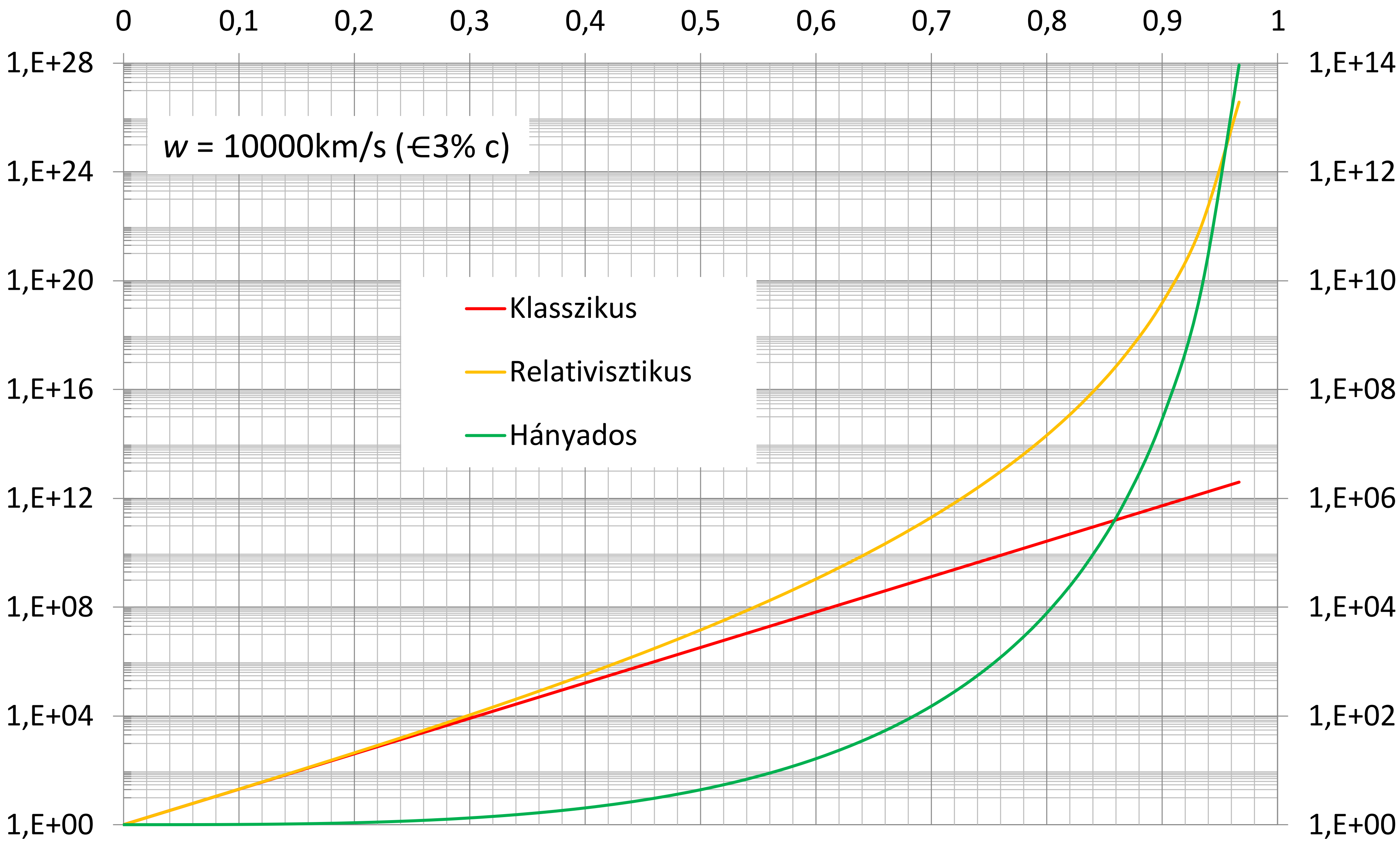
$$M=\frac{M_0}{e^{\frac{v}{w}}}$$

Relativisztikus eset

$$\ln\frac{M_0}{M}=\frac{c}{2w}\ln\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)$$

$$M=\frac{M_0}{\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)^{\frac{c}{2w}}}$$

A z_C általánosítása



A z_C általánosítása

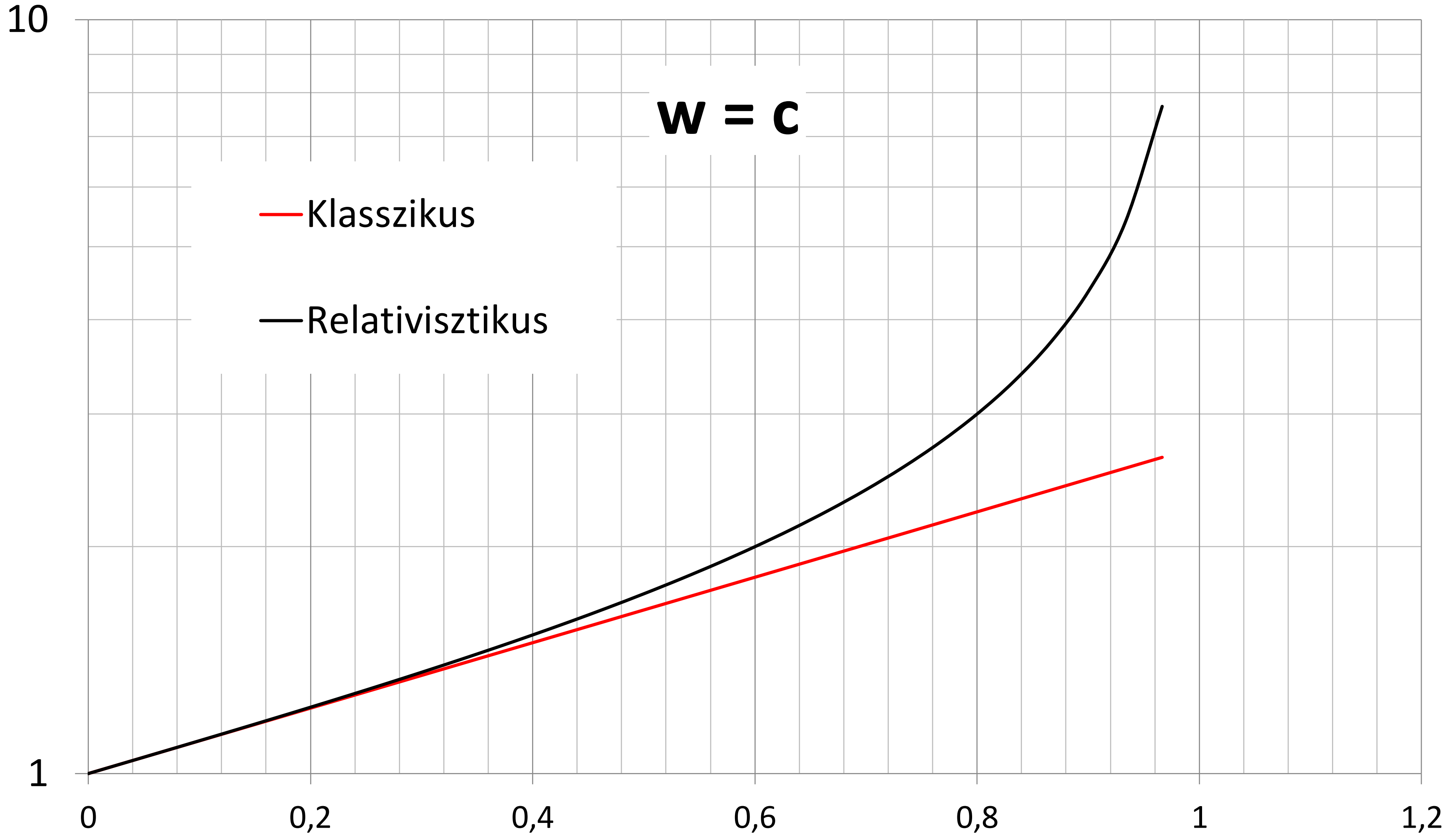
- Tehát általánosan:

$$\ln \frac{m_0}{m_{évp}} = \frac{c}{2 \cdot w} \ln\left(\frac{1 + {}^{v}\!/_{c}}{1 - {}^{v}\!/_{c}} \right)$$

- Ha w = c, akkor:

$$\ln \frac{m_0}{m_{évp}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + {}^{v}\!/_{c}}{1 - {}^{v}\!/_{c}} \right) \rightarrow \frac{m_0}{m_{évp}} = z_C = \sqrt{\frac{1 + {}^{v}\!/_{c}}{1 - {}^{v}\!/_{c}}}$$

A z_C általánosítása



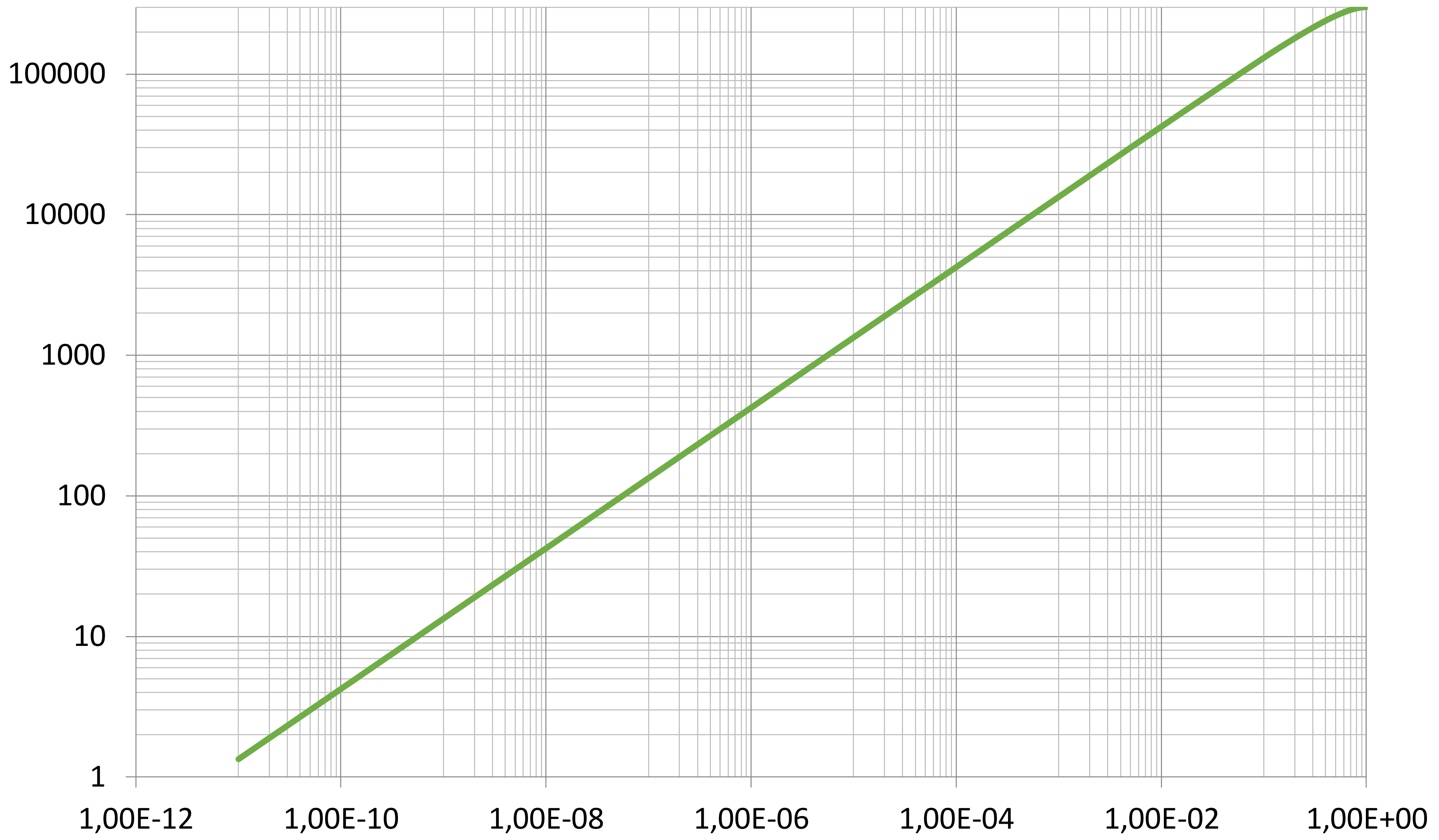
A z_C általánosítása

- A relativisztikus egyenletben a kiáramlási sebességnek van maximuma, amelyet az alábbi képlettel határozhatunk meg:

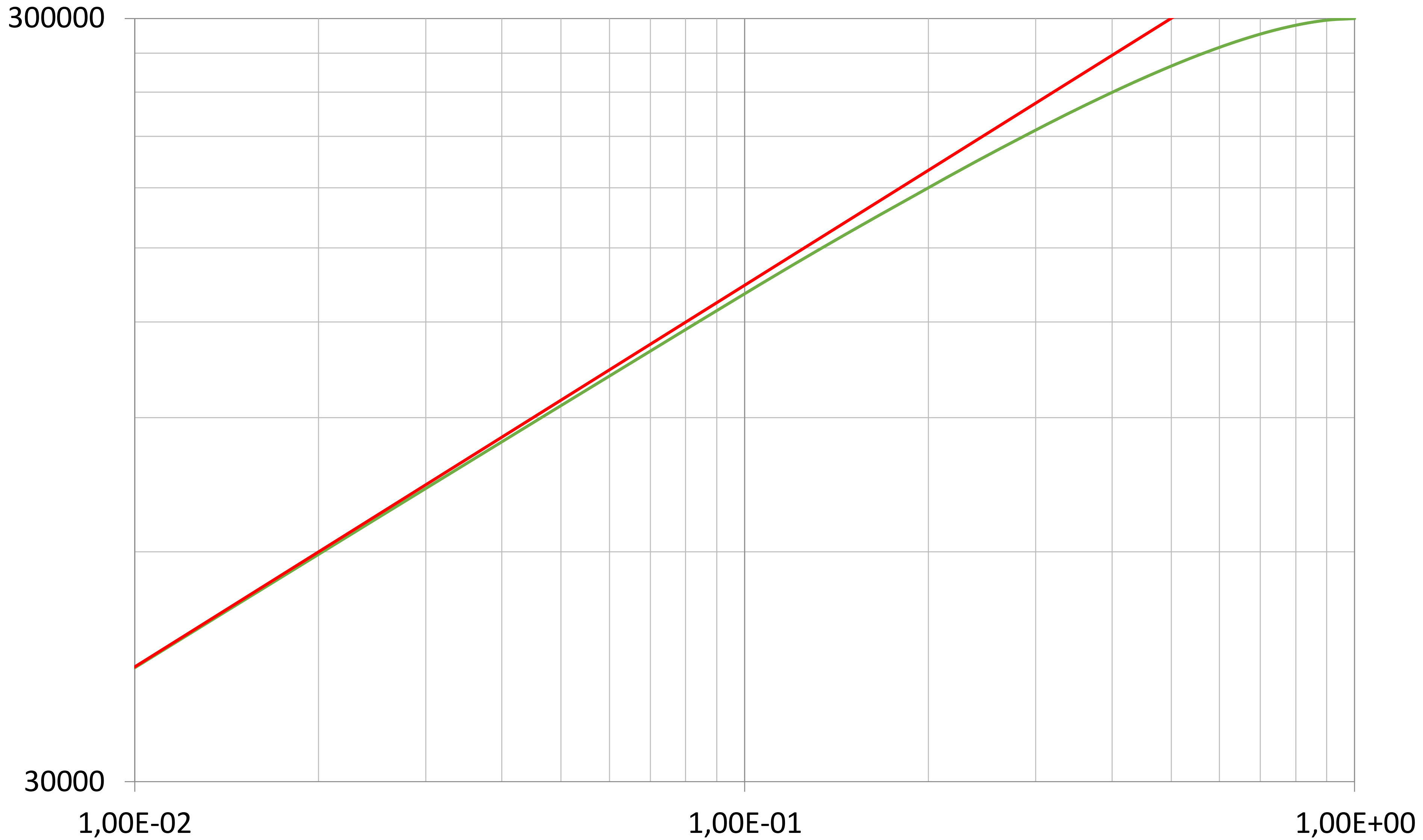
$$w_{\max} = c\sqrt{\mu \cdot (2-\mu)}$$

- Ahol μ a tüzelőanyag tömegének azon hányada, amely kinetikai energiává alakul. Az annihiláció esetén ez éppen 1.

A z_C általánosítása – w_{max}



A z_C általánosítása – w_{max}



A z_C általánosítása – w_{max}

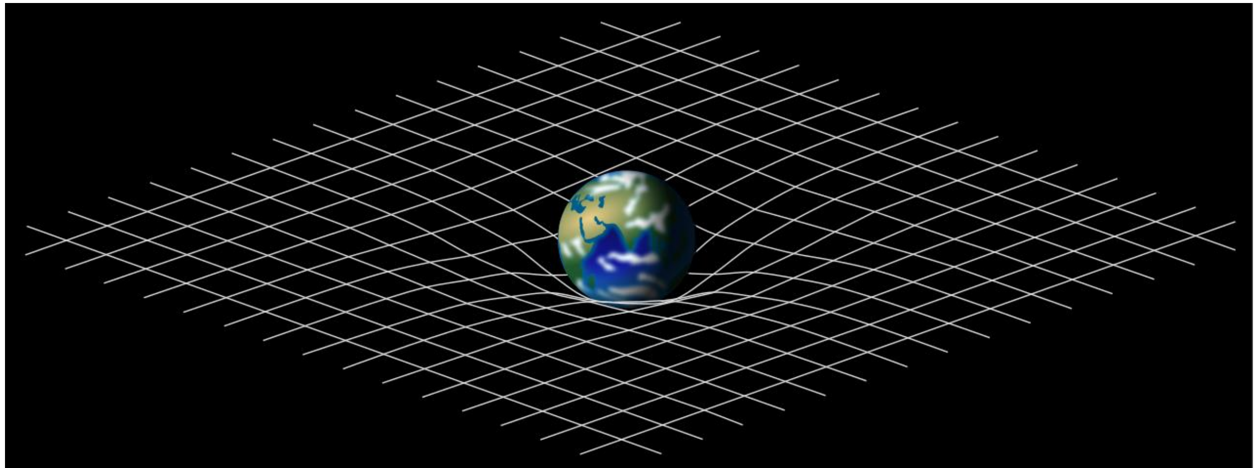
- Fotonrakétával a fénysebesség 96%-át mindössze z_c = 10 –zel lehetne elérni.
- A megismert relativisztikus Ciolkovszkij-képlet segítségével, a fénysebességgel történő kilépést feltételezve az alábbi képletet kapjuk:

$$z_C = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = \sqrt{\frac{1+0,9}{1-0,9}} = \sqrt{19} = 4,36$$

- E képlet segítségével tehát kiszámíthatjuk a fotonrakéta z_c értékét.

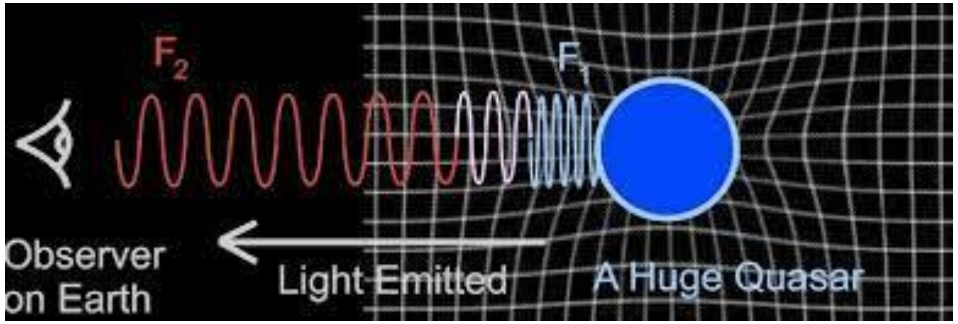
Az általános relativitás elve

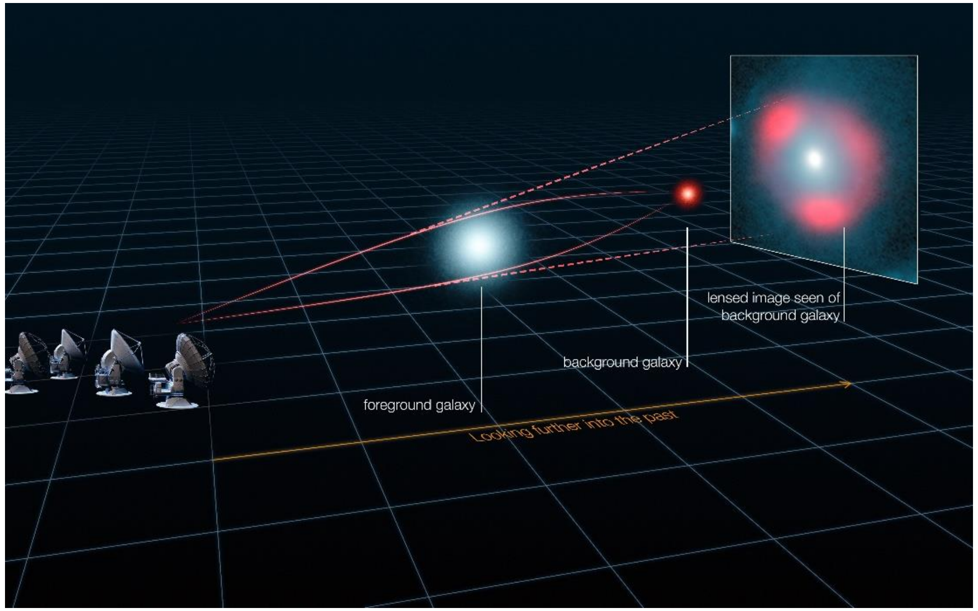
- Einstein 1915-re általánosította a relativitás elméletét, ami a gravitáció geometriai értelmezése az Einstein-féle mezőegyenletek alapján
- Általánosítja a speciális relativitáselméletet, finomítja Newton egyetemes tömegvonzás törvényét
- Egysége leírást ad a gravitációnak azáltal, hogy a tér és idő négydimenziós hiperterében (a téridőben) geometriai értelmet ad: a téridő görbülete arányos azzal az energiával vagy lendülettel, amely jelen van anyag vagy sugárzás formájában



Az általános relativitás elve

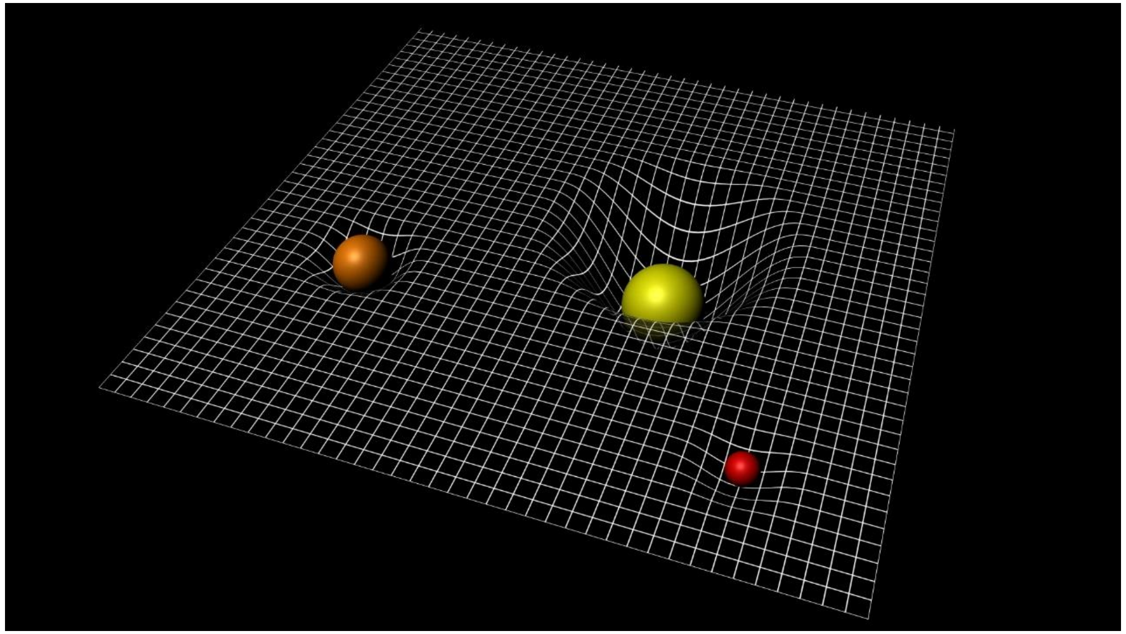
- Ezt az elméletet is számos gyakorlati tapasztalat támasztja alá az elmúlt évtizedekből:
  - **Gravitációs vöröseltolódás**: nagy erősségű gravitációs térből érkező fényhullámok frekvenciája az alacsonyabb régiók irányába (látható fény esetén a vörös szín irányába) tolódik el
  - **Gravitációs lencsehatás:** a fénysugarak meggörbülnek az erős gravitációs mezőben
  - Gravitációs hullámok
  - Fekete lyukak
  - **Idődilatáció:** erős gravitációs mezőben az idő lassabban telik





Az általános relativitás elve

- A gravitáció hatása a téridő görbületére
  - A jelen lévő testek meggörbítik a téridőt, állandó változásnak teszik ki mozgásaikkal
  - A gravitáció tehát az anyag és a téridő közötti kölcsönhatást írja le



Kép forrása: [ESA]

Az általános relativitás elve

- A gravitáció hatása az időmérésre
  - Az idődilatáció nemcsak akkor válik észlelhetővé, ha megközelítjük a fény sebességét
  - A mindennapokban pl. a GPS műholdak esetén már nem elhanyagolható a hatás
  - Egyrészt az általános relativitáselmélet szerint az erősebb gravitációs térben az idő lassabban telik, ennek az ellentéte tapasztalható a nagy magasságú pályán lévő navigációs műholdakban (kb. 20000 km tengerszint feletti magasság)
  - Másrészt pedig az egymáshoz képest relatív elmozdulást végző vonatkoztatási rendszerekben lévő (földi és űrbeli) órák eltérően mérik az időt a speciális relativitáselmélet értelmében:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2} = 1 - \frac{9 \cdot 10^6}{2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 1 - 5 \cdot 10^{-11}$$

Hivatkozások

Online dokumentumok:

[CORIOLIS] https://en.wikipedia.org/wiki/Coriolis_force#/media/File:Corioliskraftanimation.gif
[ESA] https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2015/09/Spacetime_curvature
[ICRF] https://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/ICRF/ICRF/icrf.html
[ICRS] http://www.siranah.de/html/sail040x.htm
[JIN] L. Jin, Y. Li: Model Predictive Control-Based Attitude Control of Under-Actuated Spacecraft Using Solar Radiation Pressure https://www.mdpi.com/2226-4310/9/9/498

Hivatkozások

Könyvek:
F. L. Markley, J. L. Crassidis: Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control. Springer, DOI 10.1007/978-1-4939-0802-8

Folyóiratcikkek:
H. Torres-Silva, A. Souza de Assis: Velocity and gravitational effects on GPS satellites: an outline of early prediction and detection of strong earthquakes. Ingeniare Journal, 2010, Vol. 18, No. 3.
https://www.ingeniare.cl/index.php?option=com_ingeniare&view=va&aid=203&vid=69&lang=en