Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

pótZH, 2021 ősz – 2021.12.06, Mikulás napja, 18:00

Minden megoldást részletesen indokolni kell. Azon belül minden alkalmazott jelölést be kell vezetni.

1. Piripócs bisztróban minden este 1% eséllyel verekednek össze a Piripócsi Népfront és a Piripócs Népe Front támogatói, az előzményektől függetlenül.

   a.) Mennyi az esélye annak, hogy egy év alatt legalább háromszor verekednek össze a vendégek? (5 pont)

   b.) Körülbelül hány napnak kell eltelnie ahhoz, hogy ez alatt $\frac{1}{2}$ eséllyel történjen legalább egy verekedés? (5 pont)

2. Legyenek X és Y független p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók és jelölje az összegüket $Z := X + Y$!

   a.) Mi Z generátorfüggvénye? (5 pont)

   b.) Mennyi Z szórásnégyzete? (5 pont)

3. A Vidám Mikulás étteremben járványügyi korlátozások miatt legfeljebb két vendég tartózkodhat. A vendégek Poisson folyamat szerint érkeznek, egy óra alatt átlagosan 10 szeretne belépni az étterembe, viszont ha tele van, inkább elmennek. A belépő vendégek egymástól független, exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek az étteremben - átlagosan 20 percet (mely tartalmazza a kiszolgálást és az étel elfogyasztását is). Az étterem 10:00 és 22:00 között van nyitva, nyitáskor üres.

   a.) Jelölje $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t))$ a vendégek számának eloszlásvektorát t időpontban. Az időt mérjük órákban. Melyik differenciál-egyenletrendszer írja le a $\pi(t)$ eloszlás időfejlődését? *(Vigyázat! Ha két vendég van bent, mekkora rátával megy el* ***valamelyik****?)* (5 pont)

   b.) Körülbelül mekkora az esélye, hogy záráskor még van vendég az étteremben? (5 pont)

4. Egy zárthelyi dolgozatra 80 diák érkezett, közülük mindenki 10% eséllyel bukik meg, egymástól függetlenül. A biztonság kedvéért az előadó 20 ember számára foglalt le termet a pótZH alkalmára. Jelölje A azt az eseményt, hogy a pótZH-n mégse lesz elég hely a bukott hallgatók számára.

   a.) Adjon felső becslést $\mathbb{P}(A)$-ra a Hoeffding egyenlőtlenség segítségével! (5 pont)

   b.) Adjon felső becslést $\mathbb{P}(A)$-ra a Cramér tétel segítségével! (5 pont)

5. Piripócson 2500 kisgyerek él. Télapó statisztikái szerint a gyerekeknek 50% eséllyel viselkednek jól egy évben, egymástól függetlenül (bár utóbbi feltételben Télapó nem teljesen biztos). A jó gyerekek 1000 peták értékben kapnak csokit, míg a rossz gyerekek virgácsot kapnak, melyet önkéntes krampuszok gyártanak, így ez Télapónak nem jelent költséget.

   a.) Jelölje X_i, hogy hány petákot kell költeni Télapónak az i-edik gyerekre. Mennyi X_i várható értéke, szórása és harmadik centrális abszolút momentuma? (3 pont)

   b.) A centrális határeloszlás tétel segítségével adjon becslést arra, hogy Télapónak elég $1,3 \cdot 10^6$ petákot költenie a piripócsi gyerekek csokoládéjára! (4 pont)

   c.) Legfeljebb mennyi lehet a fenti közelítés hibája a Berry-Essen tétel szerint? (A tételbeli konstans választható $C = 0,4748$-nak.) (4 pont)