4. gyakorlat (2009.09.30.) anyaga

Adottak a következő pontok: $A(1,2,3),\ B(2,-1,3),\ C(5,-2,-3)$. Ezek meghatároznak egy háromszöget. A c oldalhoz tartozó magasságvonal (m_c) talppontja D. **Feladatok:**

- ***(1.)*** $T_{(ABC\Delta)} = ?$
- ***(2.)*** $m_c = ?$
- ***(3.)*** $\cos\alpha = ?$
- ***(4.)*** $D(?,?,?),\ \overrightarrow{AD} = ?$
- ***(5.)*** $\overline{AB}$ egyenes paraméteres egyenletrendszere

Megoldás:

c és **b** oldalak meghatározása:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{c} = (1,-3,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} = (4,-4,-6)$$

(1.) Terület meghatározása: vektoriális szorzat nagyságának a fele.

$$T_{(ABC\Delta)} = \frac{|\mathbf{c}\times\mathbf{b}|}{2}$$

$$\mathbf{c}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 18\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k} = 2(9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

$$T_{(ABC\Delta)} = \frac{2\sqrt{81+9+16}}{2} = \sqrt{106}$$

(2.) m_c hosszának meghatározása a területből

$$T_{(ABC\Delta)} = \frac{|\mathbf{b}|\cdot\mathbf{m_c}}{2} \Rightarrow \mathbf{m_c} = \frac{2T_{(ABC\Delta)}}{|\mathbf{b}|}$$

$$\mathbf{m_c} = \frac{2\sqrt{106}}{\sqrt{10}}$$

(3.) $\cos\alpha$ meghatározása

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|} = \frac{4+12}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{68}} = \frac{16}{\sqrt{4\cdot5\cdot34}} = \frac{8}{\sqrt{5\cdot34}}$$

(4.) $\overrightarrow{AD}$ meghatározása: **b** merőleges vetülete **c** irányába

$$\overrightarrow{AD} = \left(\mathbf{c}\cdot\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)\cdot\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \left(\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}|^2}\right)\mathbf{b} = \frac{8}{5}\mathbf{b} = \left(\frac{8}{5},-\frac{24}{5},0\right)$$

D pont koordinátáinak meghatározása A helyvektorával és $\overrightarrow{AD}$-vel:

$$r_D = r_A + \overrightarrow{AD} = \left(\frac{13}{5},-\frac{14}{5},3\right)$$

(5.) $\overline{AB}$ egyeneshez irányvektor a **c**, pont az A

$$\mathbf{c} = (1,-3,0)$$

$$A(1,2,3)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2-3t \\ z &= 3 \end{aligned}\right\} \text{ ahol } t \in \square$$

5. gyakorlat (2009.09.30.) anyaga

Adottak a következők: $P(1,1,1)$; S_1 és S_2 síkok: $S_1: 2x+5y-3z+8=0$; $S_2: x-2y+4z=0$;

e egyenes: $e: \begin{cases} x=3t \\ y=3t+8 \\ z=1-t \end{cases}$

Feladatok:

(1.) S_1 és S_2 síkok metszésvonala

(2.) P és e síkja

(3.) P és e távolsága

Megoldás:

(1.) A keresett egyenes azon pontok halmaza, melyek mindkét síkon rajta vannak → meg kell oldani a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+5y-3z+8=0 \\ x-2y+4z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+5y-3z+8=0 \\ 2x-4y+8z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Különbség: } 9y-11z+8=0$$

A keresett egyenlet paraméterének válasszuk z-t! → $z=t \Rightarrow y=\dfrac{11t-8}{9}$

x meghatározásához ismét meg kell oldani a fenti egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+5y-3z+8=0 \\ x-2y+4z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot 2{,}5 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+5y-3z+8=0 \\ 2{,}5x-5y+10z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Összeg: } 4{,}5x+7z+8=0$$

Innen tehát $x=\dfrac{-7t-8}{4{,}5}=\dfrac{-14t-16}{9}$.

(2.) $Q(3,11,0)$ egy pont e-n → $\overrightarrow{PQ}=(-2,-10,1)$; $\mathbf{v}$ egy e irányába eső vektor: $\mathbf{v}=(3,3,-1)$;

$\mathbf{n}$ a sík normálvektora. $\mathbf{n}\perp\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{PQ}\perp\mathbf{v}\Rightarrow\mathbf{n}=\overrightarrow{PQ}\times\mathbf{v}$

$$\overrightarrow{PQ}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -10 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}=7\mathbf{i}-\mathbf{j}-36\mathbf{k} \to \text{ a sík egyenlete tehát: } 7(x-1)-(y-1)-36(z-1)=0.$$

(3.) P és e távolsága (d) $\overrightarrow{PQ}$ $\mathbf{v}$ irányú merőleges vetülete.

$$d=\left|\overrightarrow{PQ}\times\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|=\frac{\sqrt{7^2+(-1)^2+(-36)^2}}{\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{1346}}{\sqrt{19}}$$