1. feladat (12 pont)
Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 8y' + 16y = 32x + 18\,e^{-2x}$$

(H): $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 4$

$y_H = C_1 e^{4x} + C_2\, x\, e^{4x}$ (4) $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(I):
$$\begin{array}{r|l} 16\cdot & y_{ip} = Ax + B + Ce^{-2x} \ (2) \\ -8\cdot & y_{ip}' = A - 2Ce^{-2x} \\ 1 & y_{ip}'' = 4Ce^{-2x} \end{array}$$

$$16Ax + (16B - 8A) + e^{-2x}(16C + 16C + 4C) = 32x + 18e^{-2x}$$

$16A = 32 \Rightarrow A = 2$
$16B - 8A = 0 \Rightarrow B = 1$
$36C = 18 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$y_{ip} = 2x + 1 + \frac{1}{2}e^{-2x}$ (4)

$y_{id} = y_H + y_{ip} = C_1 e^{4x} + C_2\, x\, e^{4x} + 2x + 1 + \frac{1}{2}e^{-2x}$ (2)

2. feladat (10 pont)
Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ ponthoz tartozó Taylor sorait és adja meg azok konvergencia tartományát!

$$f(x) = e^{2x+3}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^3 + 8}$$

$f(x) = e^3 e^{2x} = e^3\left(1 + \frac{(2x)^1}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots\right) =$

$= e^3\left(1 + 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \dots\right)$ (3) $\quad x \in \mathbb{R}$ (1)

(Vagy Σ-val:
$f(x) = e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$)

$g(x) = \frac{1}{8}\,\frac{1}{1 - \frac{-x^3}{8}} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{8^2} - \frac{x^9}{8^3} + \dots\right)$ (4)

$|q| = \left|-\frac{x^3}{8}\right| = \frac{|x|^3}{8} < 1 \Rightarrow |x| < 2 \quad (x \in (-2, 2))$

(2)

an2v090618/1.

3. feladat (16 pont)

a) Hogyan definiáljuk egy f függvény x_0 körüli Taylor sorát?

b) Milyen elégséges tételt tanultunk arra, hogy f megegyezzék Taylor sorával?

c) Vezesse le az $f(x) = \cos x$ függvény Taylor sorát $x_0 = 0$ esetén és igazolja, hogy $f(x)$ megegyezik a Taylor sorával!

a) $\boxed{3}$ Ⓓ Legyen f akárhányszor differenciálható x_0-ban. Ekkor a formálisan előállítható

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots := T(x)$$

hatványsort az f függvény x_0 alapponthoz tartozó Taylor sorának nevezzük.

b) Elégséges tétel $f(x) = T(x)$ fennállására:

$\boxed{3}$ Ⓣ Ha f akárhányszor differenciálható $(-R,R)$-en és f, f', f'', $\ldots$, $f^{(n)}$, $\ldots$ deriváltfüggvények egyenletesen korlátosak itt, akkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad x \in (-R,R)\text{-en.}$$

Ⓜ x_0 bázispontra hasonló tétel mondható ki $(x_0 - R, x_0 + R)$-re.

c) $\boxed{10}$ A Taylor sor: $f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \end{array}\right\} \text{a deriváltak egyenletesen korlátosak } (-\infty,\infty)\text{-en}$$

$\Rightarrow f(x) = T(x) \quad \forall\, x$-re

$f^{(4)}(x) = \cos x \quad \downarrow$ Innen periodikusan ismétlődik

Behelyettesítve:

$$f(x) = \boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \qquad \boxed{x \in \mathbb{R}}$$

③ az indoklásért

⑦

4. feladat (20 pont)

a) Írja le az iránymenti derivált definícióját és a kiszámítására tanult tételt!

b) $\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ Milyen irányban kapjuk? ($\underline{e} = ?$)

Állítását bizonyítsa be!

c) $f(x,y,z) = z + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $\quad P(-1,1,0)$

$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_P = ?$, ha $\underline{e} \parallel (2,-1,1)$

an2v-090618/2.

a.) $\boxed{5}$ (D) $$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \lim_{t\to+0} \frac{f(\underline{a}+\underline{e}t) - f(\underline{a})}{t} \quad ; \quad |\underline{e}|=1$$ (3)

(T) Ha $\exists$ grad$f(\underline{a})$, akkor $\forall$ irányban $\exists$ az $\underline{a}$ pontban az iránymenti derivált és
$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \text{grad}\, f(\underline{a}) \cdot \underline{e} \quad (2) \quad (|\underline{e}|=1)$$

b.) $\boxed{7}$ (T) Ha $\exists$ grad $f(P_0)$, akkor
(3)
$$\max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = |\text{grad} f(P_0)| \quad , \quad \underline{e} = \frac{\text{grad} f(P_0)}{|\text{grad} f(P_0)|} \text{ irányban}$$
kapjuk

(B)
(4) $$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \text{grad} f(P_0) \cdot \underline{e} = |\text{grad}\, f(P_0)|\,\underbrace{|\underline{e}|}_{=1} \cos\varphi = \underbrace{|\text{grad} f(P_0)|}_{\text{konstans}} \cos\varphi$$

Így értéke csak $\cos\varphi$-től függ. Akkor maximális, ha $\cos\varphi = 1$, tehát $\varphi = 0 \Longrightarrow$
$$\max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = |\text{grad} f(P_0)| \quad ; \quad \underline{e} = \frac{\text{grad}\, f(P_0)}{|\text{grad}\, f(P_0)|}$$

c.) $\boxed{8}$ $$f(x,y,z) = z + \text{arctg}\,\frac{y}{x} \quad ; \quad P_0(-1,1,0)$$
$$f'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} \quad ; \quad f'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\, \frac{1}{x} \quad ; \quad f'_z = 1 \quad (3)$$
$$\text{grad} f(P_0) = -\frac{1}{2}\underline{i} - \frac{1}{2}\underline{j} + \underline{k} \quad (2)$$
$$\underline{e} = \frac{2\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{k} \quad (1)$$
$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \text{grad} f(P_0)\cdot \underline{e} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2}\,\frac{-1}{\sqrt{6}} + 1\,\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{6}}$$
(2)

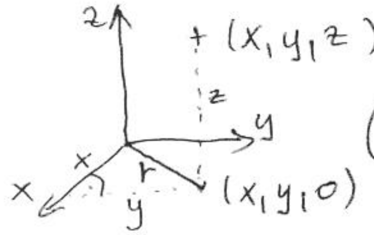
5. feladat (10 pont)*

a) Ismertesse a hengerkoordinátákat! (Ábrán mutassa be jelentésüket!) Fejezze ki x, y, z értékét a hengerkoordináták segítségével!

b) Hengerkoordináták segítségével írja le az alábbi térrészt! (Adja meg a határokat!)

$$z \le 9 - x^2 - y^2\,, \quad z \ge 0\,, \quad x^2 + y^2 \le 4$$

a) $\boxed{6}$



3

Hengerkoordináták: r, φ, z

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} 3$$

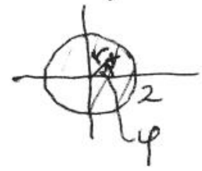
b) $\boxed{4}$

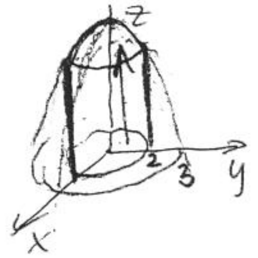
$0 \le r \le 2$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le z \le 9 - r^2$

Vetületpontok





6. feladat (9 pont)*

$$\iint_T e^{2y-3x}\, dT = ?$$

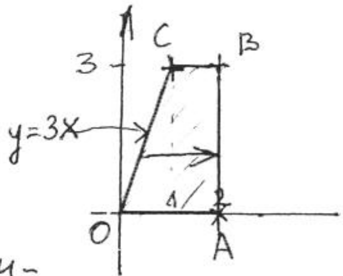
ahol T az $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,3)$ és a $C(1,3)$ pontok által meghatározott trapéz.

Ny-ról van szó

$$I = \int_0^3 \int_{x=y/3}^{2} e^{2y-3x}\, dx\, dy = \quad 3$$

$$= \int_0^3 e^{2y} \left. \frac{e^{-3x}}{-3} \right|_{x=\frac{y}{3}}^{2} dy = -\frac{1}{3} \int_0^3 \underbrace{e^{2y}\left(e^{-6} - e^{-y}\right)}_{e^{2y-6} - e^{y}} dy = \quad 3$$

$$= -\frac{1}{3}\left.\left(\frac{e^{2y-6}}{2} - e^{y}\right)\right|_{y=0}^{3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - e^{3} - \left(\frac{1}{2}e^{-6} - 1\right)\right) \quad 3$$



7. feladat (11 pont)*

Tudjuk, hogy az

$$u(x,y) = \cos 3x \ \operatorname{ch} 3y + 4y - 2x + 3$$

egy reguláris f függvény valós része. Keresse meg az u harmonikus társát!

C–R:

$$u'_x = v'_y$$
$$u'_y = -v'_x \quad 2$$

an2v-090618/4

$$\Rightarrow \quad v'_y = -3\sin 3x \cdot \mathrm{ch}\, 3y - 2 \qquad (1)$$
$$v'_x = -3\cos 3x \cdot \mathrm{sh}\, 3y - 4 \qquad (2)$$

3

(1)-ből: $v(x,y) = \int (-3\sin 3x \cdot \mathrm{ch}\,3y - 2)\,dy = -\sin 3x \cdot \mathrm{sh}\,3y - 2y + C(x)$

(2)-be behelyettesítve:

$$-3\cos 3x \cdot \mathrm{sh}\,3y + C'(x) = -3\cos 3x \cdot \mathrm{sh}\,3y - 4$$
$$\Rightarrow C'(x) = -4 \Rightarrow C(x) = -4x + K$$

Tehát $v(x,y) = -\sin 3x \cdot \mathrm{sh}\,3y - 2y - 4x + K$

6

8. feladat (12 pont)*

$$g(z) = \frac{\sin(\pi + jz)}{(z^2+16)(z-2)}$$

a) Adja meg g izolált szinguláris pontjait! (Hol nincs értelmezve g ?)
b)

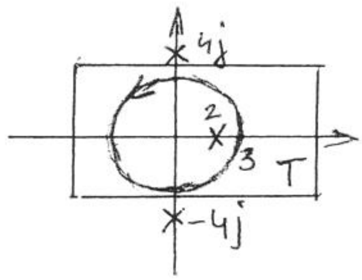
$$I = \oint_{|z|=3} g(z)\ \mathrm{d}z\,, \qquad \mathrm{Re}\, I = ?\,, \quad \mathrm{Im}\, I = ?$$

a) Szinguláris pontok a nevező nullahelyei (most):

$\boxed{3}$ $z^2+16=0$: $\quad z_{1,2} = \pm 4j$

$z-2=0 \quad\quad z_3 = 2$

b.) Csak $z=2$ esik a görbe belsejébe.



$\boxed{9}$

$$I = \oint_{|z|=3} \frac{\frac{\sin(\pi+jz)}{z^2+16}}{z-2}\,dz =$$

f reg T-n 2

$$= 2\pi j \left.\frac{\sin(\pi+jz)}{z^2+16}\right|_{z=2} = j\frac{2\pi}{20}\sin(\pi+j2) =$$

4

$$= j\frac{\pi}{10}\left(\underbrace{\sin\pi}_{=0}\,\underbrace{\cos j2}_{=\mathrm{ch}2} + \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\,\underbrace{\sin j2}_{=j\,\mathrm{sh}2}\right) = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{sh}2$$

$\mathrm{Re}\, I = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{sh}2$; $\mathrm{Im}\, I = 0$

3

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (8 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{y^2+1}{y^2+3} \quad x\,e^{-3x^2}$$

(Elég az implicit alak.)

$$\int \frac{y^2+3}{y^2+1}\,dy = \int x e^{-3x^2}\,dx \qquad 2$$

$$\int \left(1 + 2\frac{1}{1+y^2}\right) dy = -\frac{1}{6}\int -6x e^{-3x^2}\,dx$$

$$\underbrace{y + 2\,\mathrm{arctg}\,y}_{3} = \underbrace{-\frac{1}{6}\,e^{-3x^2}}_{2} + \underbrace{C}_{1}$$

10. feladat (12 pont)

$$f(x,y) = \frac{2x^2-6y^2}{3x^2+4y^2}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

b) $f'_x(x,y) = ?,\quad f'_y(x,y) = ?,\qquad$ ha $(x,y) \neq (0,0)$

a.) $\boxed{6}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{2x^2-6y^2}{3x^2+4y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3} \\ &\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{2x^2-6y^2}{3x^2+4y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-6y^2}{4y^2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \neq \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-6y^2}{3x^2+4y^2} \nexists$$

b.) $\boxed{6}$

$$f'_x = \frac{4x(3x^2+4y^2) - (2x^2-6y^2)\cdot 6x}{(3x^2+4y^2)^2} \qquad 3$$

$$f'_y = \frac{-12y(3x^2+4y^2) - (2x^2-6y^2)\cdot 8y}{(3x^2+4y^2)^2} \qquad 3$$

an2o-090618/6.