K.K.

D.: sorozat határértéke

T.: határérték egyértelműsége

T.: a_n konvergens $\Rightarrow$ korlátos (szükséges felt. konvergenciára)

Műveletek konvergens számsorozatokkal

T_1.: $(a_n \to A) \wedge (b_n \to B) \Rightarrow a_n + b_n \to A+B$

T_2.: $(a_n \to A) \Rightarrow c \cdot a_n \to c \cdot A$; $c \in \mathbb{R}$

T_3.: i) $(a_n \to 0) \wedge (b_n \text{ korlátos}) \Rightarrow a_n \cdot b_n \to 0$

ii) $(a_n \to A) \wedge (b_n \to B) \Rightarrow a_n \cdot b_n \to AB$

T_4.: $(a_n \to A) \Rightarrow |a_n| \to |A|$

T_5.: i) $b_n \to B$; $B \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$

ii) $(a_n \to A) \wedge (b_n \to B \neq 0) \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$

Háromszög-egyenlőtlenségek

i) $|x+y| \le |x| + |y|$

ii) $\big||x|-|y|\big| \le |x-y|$

T.: $\sqrt[k]{\lim a_n} = \lim \sqrt[k]{a_n}$; $a_n \ge 0$

T.: $(a_n \to \infty) \Rightarrow \left(\frac{1}{a_n} \to 0\right)$ Megj.: $(a_n \to 0) \not\Rightarrow \left(\frac{1}{a_n} \not\to \infty\right)$ ez nem igaz!

Határozott alakok: "$\frac{0}{\infty} = 0$"; $\frac{\text{korlátos}}{\infty} = 0$; $\frac{\infty}{0} = \infty$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $\infty + \infty = \infty$

Határozatlan alakok: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; 1^∞; ∞^0; 0^0

Ezekre majd L'Hospital szabály...

T.: A limesz monoton.

T.: (Rendőr-szabály) Ha $a_n \le c_n \le b_n$ és $a_n \to A$, $b_n \to A$, akkor $c_n \to A$

Spec.: Ha $a_n \to \infty$, és $b_n \ge a_n$ $n > N_0$ esetén, akkor $b_n \to \infty$

Néhány nevezetes sorozat

T.: i)

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, \text{ ha } |a| < 1 \\ 1, \text{ ha } a = 1 \\ +\infty, \text{ ha } a > 1 \\ \nexists, \text{ ha } a \le -1 \text{ (oszcillál/alternál)} \end{cases}$$

exponenciális sorozat $a \in \mathbb{R}$

ii)

$$\lim_{n\to\infty} \underset{\text{hatv.}}{n^k} \underset{\text{exp.}}{a^n} = \begin{cases} 0, \text{ ha } |a| < 1,\ k \in \mathbb{Z}^+ \text{ (sőt: } k \in \mathbb{R}) \\ \infty, \text{ ha } a > 1,\ k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

iii)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1, \quad p \ge 0;\ p \in \mathbb{R}_+$$

iv)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

v) Nagyságrendek összehasonlítása:

$$n^n >> n! >> a^n >> n^k >> \log n; \quad a > 1,\ k \in \mathbb{N}_+$$

T.: Ha $a_n \xrightarrow[\infty]{n} A$, akkor bármely a_{n_k} <u>részsorozatára</u> is $a_{n_k} \xrightarrow[\infty]{k} A$

<u>Cantor-féle teljességi axióma:</u> egymásba skatulyázott (nem üres) zárt intervallumok metszete nem üres.

<u>Dedekind-féle folytonossági tétel:</u> Felülről korlátos, nem üres halmaznak $\exists$ supremuma.
Alulról ——— u ——— $\exists$ infimuma.

T.: Ha a_n felülről korlátos és monoton növő, akkor a_n konvergens (elégséges felt. konv.-ra)
• rekurzív sorozatok! (a_n T.T.-vel: korlátos b.; monotonitás ...)

T.: Egy kitüntetett számsorozat: $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[\infty]{n} e$

i) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$

ii) $\left(1+\frac{1}{pn}\right)^n \to e^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{e}$; $p \in \mathbb{N}$

iii) $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \to e^a$; $a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\left(1 \pm \frac{a}{pn}\right)^n \xrightarrow[\infty]{n} e^{\pm\frac{a}{p}}} \qquad p \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}$$

T.: Bernoulli-egyenlőtlenség: $(1+x)^n \geq 1+nx$; $x > -1$ (következik a binomiális tételből)

T.: Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel: Ha a_n korlátos $\Rightarrow \exists$ konvergens részsorozata

D.: **Numerikus sorok**: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \to \infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_k + r_k = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \right)$$

<u>Harmonikus sor</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

<u>Teleszkópikus összeg pl.</u>: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{a_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}_{a_2} + \ldots$

$$\ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}_{a_n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\left(a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Így: $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k(k+1)}}_{a_k} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}_{s_n} = 1$

<u>Geometriai (mértani) sor</u>: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_0 \cdot q^n}_{a_n} = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \ldots$

véges geometriai sor összege: $s_n = a_0 \frac{1-q^n}{1-q} = a_0 \frac{q^n - 1}{q-1}$; $q \neq 1$

végtelen geom. sor: $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 \cdot q^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_0 \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} \frac{a_0}{1-q}, & \text{ha } |q|<1 \\ \text{divergens egyébként} \end{cases}$

Tétel: (Szükséges feltétel a sor konvergenciájára)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R} \text{ konvergens} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

K.K.

D.: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot c_k$ sor Leibniz-sor, ha:

i, váltakozó előjelű

(ii) $c_k \searrow$ $(c_{k+1} < c_k \;\; \forall k \in \mathbb{N})$

(iii) $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$

T.: Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Leibniz-sor, akkor konvergens.

T.: Leibniz sor hibája becsülhető az első elhagyott tag abszolútértékével, azaz

$$H_n = \Big|\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}_{S} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{s_n}\Big| \leq c_{n+1}$$

D.: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor abszolút konvergens, ha $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergens.

D.: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

T.: Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abszolút konvergens $\Rightarrow$ konvergens

Pozitív tagú sorok $\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,;\; a_k > 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N}$

T.: $s_n \nearrow$ (poz. tagú sor részletösszegei monoton növekedők)

T.: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens $(a_n > 0) \Leftrightarrow s_n < K \in \mathbb{R}$ (poz. tagú sor konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele: részletösszegek korlátossága)

T.: $$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = \begin{cases} \text{konvergens, ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}}$$

Majoráns kritérium (csak poz. tagú sorokra!):

T.: Ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $0 < a_n \leq c_n$, és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ (konv.) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (konv.)

Minoráns kritérium (csak poz. tagú sorokra!):

T.: Ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $0 < d_n \leq a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \infty$ (div.) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (div.)

K.K

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, mellékeredmény: $|\sin\alpha| \le |\alpha|$ $\quad (\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}])$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (trigo. Pit.)

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta \to \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ (addíciós tételek

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta \to \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ & kétszeres szögek szög[f]g-ei)

Levezethetők:

$$\begin{aligned} &\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \pm\ &\quad 1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{aligned}$$

$\beta := 2\alpha$

(félszögek szfv-ei)

$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \longrightarrow \cos^2\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1+\cos\beta}{2}$

$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \longrightarrow \sin^2\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1-\cos\beta}{2}$

Pl.

$$\begin{aligned} &\sin(\mu+w) = \sin\mu\cos w + \cos\mu\sin w \\ \ominus\ &\sin(\mu-w) = \sin\mu\cos w - \cos\mu\sin w \end{aligned}$$

(két szfg. összegének/ különbségének szorzattá alakítása)

$$\sin(\underbrace{\mu+w}_{\alpha}) - \sin(\underbrace{\mu-w}_{\beta}) = 2\cos\mu\sin w, \quad \mu = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad w = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

...

$(x^n)' = n x^{n-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(a^x)' = a^x\cdot\ln a$

Exp – hatvány fg. deriválása: áttérés „e" alapra; pl.:

$(x^x)' = (e^{x\ln x})' = \ldots$

Logaritmikus deriválás:

$f(x) > 0$ diff. ható $\Rightarrow \ln f(x)$ is diff. ható

$\Rightarrow (\ln f)' = \dfrac{1}{f}\cdot f' \Rightarrow f' = f\cdot(\ln f)'$

K.K.

$(fg)' = f'g + fg'$ (Leibniz-szabály)

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (összetett fg.)

Inverz fg. deriváltja:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}, \text{ vagyis } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin x}_{\alpha})} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sin\alpha = x$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$ $(\cos\alpha \geq 0)$

$x \in [-1;1]$; $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$(\text{arctg}\,x)' = \frac{1}{\text{tg}'(\text{arctg}\,x)} = \cos^2(\underbrace{\text{arctg}\,x}_{\alpha}) = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\text{tg}^2\alpha + 1} = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;+1)$

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;+1)$

$(\text{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$(\text{arcctg}\,x)' = \frac{-1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

a^x inverze: $\log_a x$

$a^{\log_a x} = x = \log_a a^x$; $e^{\ln x} = x = \ln e^x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'\big|_{y=\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad (x>0)$$

$$(a^x)' = \left[(e^{\ln a})^x\right]' = (e^{x\cdot\ln a})' = e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a =$$

$$= a^x \cdot \ln a$$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x>0)$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Exp. & log. azonosságok

K.K.

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$c \cdot \ln a = \ln(a^c)$

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} = \frac{\ln c}{\ln b}$

$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Hiperbolikus fg-ek

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh}(-x)$ páratlan $\qquad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(-x)$ páros $\qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \longrightarrow \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \longrightarrow \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$

Levezethetőek:

$$\operatorname{ch}(2x) + 1 = 2\operatorname{ch}^2 x$$

$$\operatorname{ch}(2x) - 1 = 2\operatorname{sh}^2 x$$

- Előjel könnyen megjegyezhető:

ahhoz, h. $\boxed{+}$ kell...

pl. $\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) \boxed{?} 1}{2} = \frac{(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \boxed{?} (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)}{2} = \frac{2\operatorname{ch}^2 x}{2} = \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2}$

(K.K.)

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ páratlan

$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ páratlan $(x \neq 0)$

$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ $x \neq 0$

Inverz hiperbolikus fg-ek

$\operatorname{sh}^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x$

$\operatorname{ch}^{-1}(x) = \operatorname{arch} x$ $x \in [1; \infty)$

$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(x > 1)$

$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$ $x \in (-1; 1)$

$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}$

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Implicit fg. deriválása

[explicit fv.: $y = f(x)$]

implicit fv.: $F(x, y(x)) = 0$

Pl. $x^2 + y^2(x) = 1$ deriválása:

$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$

L'Hospital-szabály

(„$\frac{0}{0}$", ill. „$\frac{\infty}{\infty}$" típusú határértékek számolására) Legyen f, g diff-ható $\dot{K}_\delta(x_0)$-ban $(\delta > 0)$; $g(x) \neq 0$; $g'(x) \neq 0$, ha $x \in \dot{K}_\delta(x_0)$, és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. Ekkor ha $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, akkor

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Alkalmazás más határozatlan alakokra:

$0 \cdot \infty$; $f \cdot g = \frac{\overset{\to 0}{f}}{\underset{\to \infty}{1/g}} = \frac{\overset{\to \infty}{g}}{\underset{\to \pm\infty}{1/f}}$ ✓

$\infty - \infty$; $f - g = \frac{1}{1/f} - \frac{1}{1/g} = \frac{\overset{\to 0}{1/g - 1/f}}{\underset{\to 0}{1/f \cdot 1/g}}$ ✓

„$0^0, 1^\infty, \infty^0$";

$f^g = e^{g \ln f}$

$\lim \underbrace{g \ln f}_{0 \cdot (\pm\infty)} = ?$

T.: (Bolzano) Legyen f folytonos $[a,b]$-en, és $f(a) < c < f(b)$. Ekkor $\exists \xi \in (a,b)$, hogy $f(\xi) = c$.

spec.: f folytonos $[a;b]$-n, $f(a) \cdot f(b) < 0$ $\Downarrow$ $\exists c \in (a,b)$ $f(c) = 0$

K.K.

T.: (Weierstrass I.) Kompakt halmazon folyt. függvény korlátos.

T.: (Dedekind) Ha $H \subset \mathbb{R}$ korlátos $\Rightarrow \exists \sup H, \inf H$

T.: (Weierstrass II.) Kompakt halmazon folytonos függvény felveszi infimumát és supremumát.

D.: folytonosság: lokális tulajdonság – egy pontban – lokális δ

Legyen x_0 a D_f értelmezési tartományának belső pontja ($Tehát\ \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x_0) \subset D_f$) [elég, ha $x_0 \in D_f$, és x_0 a D_f torl. pontja]

1.) f folytonos az x_0-ban, ha $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

VAGY

2.) $\forall x_0 \in [a;b]$, $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, hogy $|f(x) - \underset{\ddot{A}}{f(x_0)}| < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$.

D.: f az I intervallumon egyenletesen folytonos, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, ha $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ és $x_1, x_2 \in I$.
– globális δ

T.: Kompakt halmazon folyt. fgv. egyenletesen folytonos.

T.: Ha f folytonos $[a;\infty)$-en, és $\exists \lim_{x \to \infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, akkor f egyenletesen folytonos $[a;\infty)$-on.

D.: Az f függvény deriváltja (differenciálhányadosa) az x_0 pontban:
($\exists$, ha $x_0 \in D_f$ és x_0 torlódási pontja D_f-nek, ehhez elég, ha $\exists \varepsilon > 0$ $K_\varepsilon(x_0) \subset D_f$):

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Jobboldali derivált x_0-ban: $[x_0, x_0 + \varepsilon) \subset D_f$ $(\varepsilon > 0)$,

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Baloldali: –

T.: A derivált létezésének szükséges, de nem elégséges feltétele a folytonosság.

T.: (Rolle) Legyen f folyt. az $[a;b]$-on, és f diffható az $(a;b)$-on ($a,b \in \mathbb{R}$). Továbbá $f(a)=f(b)$. Ekkor $\exists \xi \in (a,b): f'(\xi)=0$. K.K.

T.: (Lagrange-féle középérték-tétel) f folyt. $[a,b]$-n ($a,b \in \mathbb{R}$), f diff.ható (a,b)-on.
Ekkor $\exists \xi \in (a,b)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

T.: (Cauchy-féle középérték tétel) f,g folyt. $[a,b]$-n ($a,b \in \mathbb{R}$); f,g diffható (a,b)-n és $g'(t) \neq 0$, ha $t \in (a,b)$, akkor
$\exists \xi \in (a,b)$: $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

T.: Ha f folyt. $[a,b]$-n, és f diff.ható (a,b)-n és $f'(x)=0$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x) \equiv c$; $\forall x \in [a,b]$

T.: (Az integrálszámítás I. alaptétele) f,g folyt. $[a,b]$-n; f,g diffható (a,b)-n és $\forall x \in (a,b)$ esetén $f'(x)=g'(x)$. Ekkor $f(x)=g(x)+c$ $\forall x \in [a,b]$

T.: (L'Hospital-szabály) ...

D.: $g(x)=Ax+B$ az $f(x)$ fgv. egyenes asszimptotája $+\infty$-ben (ill. $-\infty$-ben), ha

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}} (f(x)-g(x)) = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}} (f(x)-Ax-B) = 0. \rightarrow A = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}} \frac{f(x)}{x}$$

$$\rightarrow B = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}} (f(x)-Ax)$$

Görbék paraméteres megadása

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\end{aligned}\right\} \quad \text{paraméter: } t \in I = [t_1;t_2] \qquad t \longmapsto (x(t),y(t))$$

- $x(t)$ folytonos és szig. mon. I-n $\Rightarrow \exists t(x)$, ekkor $y(x)=y(t(x))$
- $x(t), y(t)$ deriválható $t_0 \in (t_1;t_2)$-n és $\dot{x}(t_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists \boxed{y'(x_0) = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}}$; $x_0 = x(t_0)$

(jel.: $y' = \dfrac{dy}{dx}$; $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$; $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$)

Második derivált:
(ha létezik...)

$$\boxed{y''(x_0) = \frac{\ddot{y}(t_0)\cdot\dot{x}(t_0) - \dot{y}(t_0)\cdot\ddot{x}(t_0)}{(\dot{x}(t_0))^3}} \quad ; \; x_0 = x(t_0)$$

K.K.

Határozatlan integrál tulajdonságai

① $(F+G)' = F' + G'$ $\quad \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ additivitás tul.

② $(cF)' = c \cdot F'$ $\quad \int c f(x)dx = c\int f(x)dx$; $c \in \mathbb{R}$ homogén tul.

③ $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi'$ $\quad \boxed{\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c \text{ ; } F'(x) = f(x)}$

Speciális esetek

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ ; } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \varphi^\alpha(x) \cdot \varphi'(x)dx = \frac{\varphi^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \text{ ; } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + c$$

$$\int e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)dx = e^{\varphi(x)} + c$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int f' \cdot f^\alpha = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c; \ \alpha \neq -1 \\ \int \frac{f'}{f} = \ln|f| + c\end{array}}$$

Példák

$$\int \underbrace{\operatorname{sh}x}_{\sim\varphi'(x)} \cdot \underbrace{(\overbrace{3+4\operatorname{ch}x}^{\varphi(x)})^3}_{\varphi^3(x)} dx = \frac{1}{4}\int 4\operatorname{sh}x\,(3+4\operatorname{ch}x)^3 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{\varphi^4(x)}{4} + c = $$

$$= \frac{(3+4\operatorname{ch}x)^4}{16} + c$$

$$\int \operatorname{tg}x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{\overbrace{\sin x}^{\varphi'}}{\underbrace{-\cos x}_{\varphi}} dx = -\ln|-\cos x| + c = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int x^2 \operatorname{sh}(3x^3-5)\,dx = \frac{1}{9}\int \underbrace{9x^2}_{\varphi'} \cdot \underbrace{\operatorname{sh}(3x^3-5)}_{\operatorname{sh}(\varphi(x))} dx = \frac{1}{9} \operatorname{ch}(3x^3-5) + c$$

$$\int \frac{3}{(2+5x)^2} dx = 3\int (2+5x)^{-2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{(2+5x)^{-1}}{-1}\right) + c = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2+5x} + c$$

Ha $\int f(x)dx = F(x) + c$, azaz $F'(x) = f(x)$, akkor

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

Integrálási módszerek

1., $\sin(ax)\cdot\sin(bx)$

$\cos\ldots \quad \cdots \quad \cos\ldots$

$\sin\ldots \quad \cdots \quad \cos\ldots$

(1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ | (+) (−)

(2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ | (−) (+)

(+) $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$ (1) (+)(+)(−)

(+) $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ (2) (−)(+)(+)

(−) $2\sin\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ (2) (−)(−)(+)

Pl.: $\int\sin(2x)\cdot\sin(3x)=\frac{1}{2}\int\cos(2x-3x)\,dx-\frac{1}{2}\int\cos(2x+3x)\,dx=$

$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sin 5x}{10}+c$

2., $\sin^n x\cdot\cos^m x$

- **a.,** Egyik kitevő 0, másik páratlan:

$\sin^{2n+1}x=(\sin^2 x)^n\cdot\sin x=(1-\cos^2 x)^n\cdot\sin x=$

$=$ „polinom$(\cos x)$" $\cdot\sin x=\sum_k a_k\cos^k x\cdot\sin x$; $f^k\cdot f'$ alakú

$\cos^{2n+1}x=(1-\sin^2 x)^n\cdot\cos x=\ldots$

Pl.: $\int\cos^5 x\,dx=\int\cos x\,(1-\sin^2 x)^2\,dx=\overbrace{\int\cos x\,dx}^{\sin x}-2\overbrace{\int\sin^2 x\cos x\,dx}^{f^2\cdot f'}+$

$+\int\sin^4 x\cos x\,dx=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+c$

- **b.,** Egyik kitevő 0, másik páros (kétszeres szögek):

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$; Pl.: $\int\sin^6 x\,dx=\int(\sin^2 x)^3\,dx=\ldots$

c., $\sin^n x\cdot\cos^m x$; $n\neq 0$, $m\neq 0$

- Ha az egyik kitevő páratlan: $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ alkalmazása, $f^n\cdot f'$ alak …

Pl.: $\int\cos^3 x\sin^2 x\,dx=\int\cos x\,(1-\sin^2 x)\cdot\sin^2 x\,dx=\int\cos x\cdot\sin^2 x\,dx-\int\cos x\sin^4 x\,dx=$

$=\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

- Ha n is és m is páros: $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, $x\to 2x$ (linearizáló képlet …)

Pl.: $\int\underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\cos^4 x\,dx=\int\cos^4 x\,dx-\int\cos^6 x\,dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2-\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3=\ldots$

K.K.

3. Parciális integrálás

$(u\cdot v)' = u'v + u\cdot v'$ integrálja...

$$\boxed{\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx}$$

a) $\int \underbrace{\text{polinom}}_{u} \cdot \underbrace{\{e^{ax};\ \sin(ax);\ \cos(ax);\ sh(ax);\ ch(ax)\}}_{v'} dx$

Pl.: $\int \underbrace{(x^2+x+1)}_{u(x)}\ \underbrace{sh(2x)}_{v'(x)}dx = \ldots$ kétszer is alkalmazzuk (itt)...

b) $\int \underbrace{\text{polinom}}_{v'} \cdot \underbrace{\left\{\begin{matrix} \ln ax; & \\ \arcsin(ax); & arsh(ax); \\ \arccos(ax); & arch(ax); \\ arctg(ax); & \\ arcctg(ax); & \end{matrix}\right\}}_{u} dx$

Pl.: $\int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx = x\cdot \ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$

c) $\int \left\{\begin{matrix} e^{ax}; & \\ \sin ax; & \cos ax; \\ sh\,ax; & ch\,ax; \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} e^{bx}; & \\ \sin bx; & \cos bx; \\ sh\,bx; & ch\,bx; \end{matrix}\right\} dx$

Kétszeres parciális integrálással egyenlet I-re (integrálra).

Pl.: $I = \int \underbrace{e^{3x}}_{u'}\ \underbrace{sh(2x)}_{v}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cdot sh(2x) - \frac{2}{3}\int \underbrace{e^{3x}}_{u'}\cdot \underbrace{ch(2x)}_{v}dx = *$

$u = \frac{1}{3}e^{3x};\ v' = 2ch(2x)$ $\qquad$ $u = \frac{1}{3}e^{3x};\ v' = 2sh(2x)$

$$* = \frac{1}{3}e^{3x}\cdot sh(2x) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\cdot ch(2x) - \frac{2}{3}\underbrace{\int e^{3x} sh(2x)dx}_{I}\right)$$

Azt kaptuk, hogy

$$I = \frac{1}{3}e^{3x}\left(sh(2x) - \frac{2}{3}ch(2x)\right) + \frac{4}{9}I$$

$$I(x) = \frac{e^{3x}}{3}\left(sh(2x) - \frac{2}{3}ch(2x)\right)\cdot\frac{9}{5} + c$$

$\boxed{4.}$ Racionális törtfüggvények $R(x) = \frac{\text{polinom}(x)}{\text{polinom}(x)} = \frac{Q(x)}{P(x)}$

Valódi, ha $\deg Q < \deg P$

Lépések:
- Maradékos osztás, ha $\deg Q \geq \deg P \Rightarrow$ valódi tört. + pol.
- $P(x)$ szorzattá alakítása (valós gyöktényezők)
- Résztörtekre bontás

$$P(x) = \underbrace{(x-\alpha)(x-\beta)\cdot\ldots}_{\text{1., egyszeres valós gyökök}} \underbrace{(x-a)^{n_1}\cdot(x-b)^{n_2}}_{\text{2., többszörös valós gyökök}}\cdot\ldots\underbrace{(x^2+Ax+B)(x^2+Cx+D)\cdot\ldots}_{\text{3., egyszeres komplex gyökpárok}}$$

$$\ldots\cdot\underbrace{(x^2+Ex+F)^k}_{\text{4., többszörös komplex gyökpárok}}\cdot\ldots$$

$R(x) = \sum$ parciális törtek – ezeket már tudjuk integrálni!

1., $(x-\alpha)^1 \to \frac{A}{x-\alpha}$ (más jelölés: A itt mást jelent!)

2., $(x-a)^n \to \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \ldots + \frac{W}{(x-a)^m}$

3., $(x^2+Ax+B)^1 \to \frac{Ex+F}{x^2+Ax+B}$

4., $(x^2+Ex+F)^k \to \frac{u_1x+v_1}{x^2+Ex+F} + \frac{u_2x+v_2}{(x^2+Ex+F)^2} + \ldots + \frac{u_kx+v_k}{(x^2+Ex+F)^k}$

Behelyettesítek konkrét értékeket ...

Területszámítás

$f(x)$, $g(x)$ által körbezárt terület $[a,b]$ felett:

$$T = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

Newton–Leibniz tétel

Ha $f \in R[a,b]$, és F az f függvény egy primitív függvénye $[a,b]$-n, akkor $\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = F(b)-F(a)$. $(F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b])$

[Határozott integrál a primitív függvény növekménye.]

K. K.

D.: Legyen $f \in R[a,b]$. f integrál-függvénye:

$$F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\,dt \qquad x \in [a,b]$$

$$F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)dt$$

T.: (Integrálszámítás II. alaptétele) Legyen [redacted] $f \in R[a,b]$ $(\Rightarrow |f| < K)$, $x \in [a,b]$

1, F folytonos $[a,b]$-n

2, Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor $\exists F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ [2,-nél elég (a,b)?]

$\boxed{\text{Köv}}$: Ha $f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b] \Rightarrow \exists F(x) = \int_a^x f \overset{\text{Int. II.}}{\Longrightarrow} F'(x) = f(x)$

Pl.: $F(x) = \int_{t=0}^{x} \cos^3(t)\,dt$; $G(x) = \int_{t=x^2}^{e^x} \cos^3(t)\,dt = \int_{t=0}^{e^x} \cos^3(t)\,dt - \int_{t=0}^{x^2} \cos^3(t)\,dt = F(e^x) - F(x^2)$

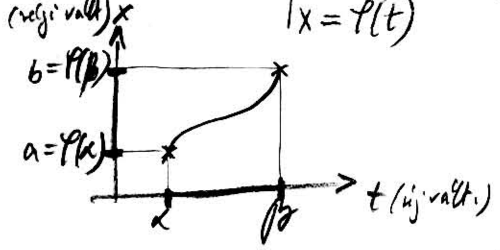
a, $F'(x) = ?$; $F'(x) \underset{\uparrow}{=} \cos^3(x)$
Int. II. ($\cos^3 t$ folyt.)

b, $G'(x) = \left(F(e^x) - F(x^2)\right)' = F'(e^x)\cdot(e^x)' - F'(x^2)\cdot(x^2)' =$
$= \cos^3(e^x)\cdot e^x - \cos^3(x^2)\cdot 2x$

Határozott integrálra: $\int_a^b u \cdot v' = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u'v$

<u>Helyettesítéses integrál</u> (sokoldalú!)

I.: a, $\int f(x)\,dx \Big|_{x = \varphi(t)} = \int f(\varphi(t)) \cdot \underbrace{\varphi'(t) \cdot dt}_{dx}$, ahol φ folyt. diff-ható és szig. monoton $[\alpha;\beta]$-n, f folyt. $[\varphi(\alpha); \varphi(\beta)]$-n



Formálisan a helyettesítés:
$x = \varphi(t)$; $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$; „$dx = \varphi'(t)dt$" ; $t = \psi(x)$

b, $$\int_{x=a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{t=\alpha=\varphi^{-1}(a)}^{\beta=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

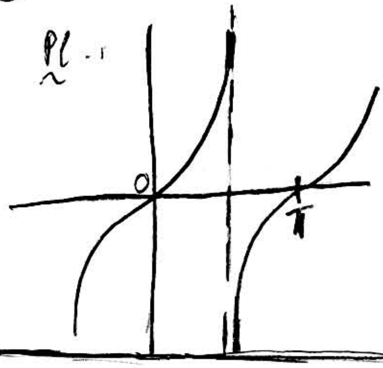
Impropriús integrál (következő lapon!)

① Nem véges intervallumon integrálok

Pl.: $\int_\alpha^\infty f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_\alpha^A f(x)dx$

② Intervallumon belül másodfajú szakadás

Pl.:



$$\int_0^\pi f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0+}\int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\pi} f(x)dx$$

Helyettesítéses integrál

$$\boxed{\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt}$$

formálisan: $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$

$dx = \varphi'(t)\cdot dt$

$$\boxed{\int_{x=x_1=\varphi(t_1)}^{x_2=\varphi(t_2)} f(x)dx = \int_{t=t_1=\varphi^{-1}(x_1)}^{t_2=\varphi^{-1}(x_2)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$$

a.) $\int R(x;\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

rac. törtfv., $\frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$ — teljes négyzetté alakítás, 3 eset:

$\sqrt{1-A^2}$; $A=\sin t$ (cost is jó!); $\sqrt{1-A^2}=\cos t$

$\sqrt{B^2+1}$; $B=\text{sh}\,t$; $\sqrt{B^2+1}=\text{ch}\,t$

$\sqrt{C^2-1}$; $C=\text{ch}\,t$; $\sqrt{C^2-1}=\text{sh}\,t$

A, B, C x-ben lineáris

b.) $\int R(e^x)dx\Big|_{x=\ln t} = \int R(t)\cdot\frac{1}{t}dt$

$t=e^x$; $x\in\mathbb{R}$; $t>0$

$dt = e^x dx \to x=\ln t$

$dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \leftrightarrow dx = \frac{1}{t}dt$

c.) $\int R(x;\sqrt[n]{ax+b})dx \to \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\frac{n}{a}t^{n-1}dt$

$t=\sqrt[n]{ax+b}$ (átgondolni: inverz 1:1 értelmű)

$x=\frac{1}{a}(t^n-b)$

$dx = \frac{n}{a}\cdot t^{n-1}dt$

d.) $\int R(x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \dots)dx$ legyen q a $\{q_i\}$ nevezők legkisebb közös többszöröse; $t=x^{1/q}$

Pl.: $\int\frac{1}{2-\cos x}dx = \int\frac{1}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt =$

$=\int\frac{2dt}{1+3t^2} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt3}\text{arctg}(\sqrt3 t)+c =$

$=\frac{2}{\sqrt3}\text{arctg}\left(\sqrt3\,\text{tg}\frac{x}{2}\right)+c$

e.) $\int R(\sin x, \cos x)dx$

$\boxed{t=\text{tg}\frac{x}{2}}$; $t\in\mathbb{R}$, $x\in(-\pi,\pi)$

$x=2\,\text{arctg}\,t$; $\boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}dt}$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{\text{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

K.K.

Improprius integrál

$\boxed{a.)}$ *I nem korlátos*

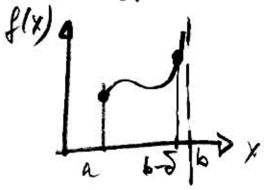
Ha $f \in R[a,\omega]$ $\forall \omega > a$ esetén: $\mathbb{R}$

$$\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\omega \to \infty} \int_{x=a}^{\omega} f(x)\,dx \quad (\text{ha } \exists)$$

$\Bigg($ Hasonlóan: $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_{-\omega}^{b} f(x)\,dx$ $\Bigg)$

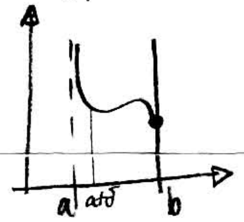
$\boxed{b.)}$ *f nem korlátos*

i.) Végpontban: $f \in R[a, b-\delta]$; $\delta > 0$



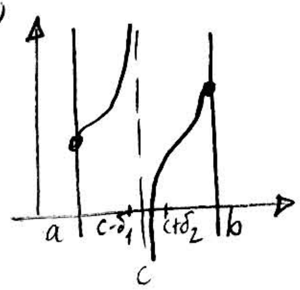
$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0+0} \int_{a}^{b-\delta} f(x)\,dx$$

ii.) Végpontban: $f \in R[a+\delta, b]$; $\delta > 0$



$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0+0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

iii.)



$f \in R[a, c-\delta_1]$

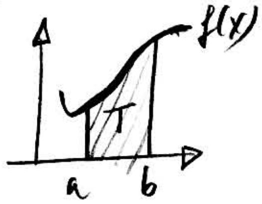
$f \in R[c+\delta_2, b]$

$\delta_1 \neq \delta_2$; $\delta_1, \delta_2 > 0$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta_1 \to 0} \int_{a}^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \lim_{\delta_2 \to 0} \int_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx$$

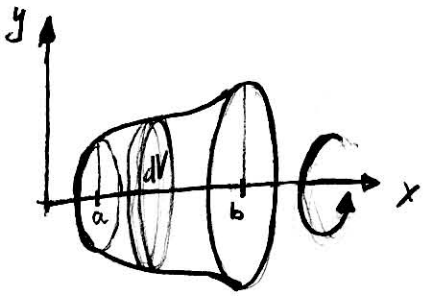
Integrál alkalmazásai

- **Területszámítás**



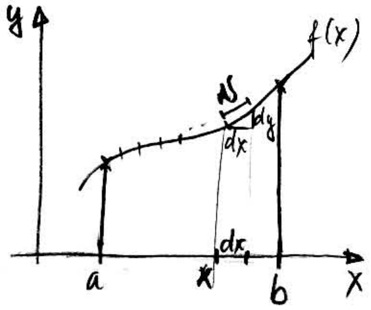
$$T = \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx$$

- **Forgástest térfogata**



$$\boxed{V} = \int dV = \int_{x=a}^{b} f^2(x)\cdot\pi\cdot dx = \boxed{\pi\cdot\int_{x=a}^{b} f^2(x)\cdot dx}$$

- **Ívhossz**



$$\boxed{S} = \int dS(x) = \boxed{\int_{x=a}^{b} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

Integrálkritérium

T.: Legyen $f: [1;\infty] \to \mathbb{R}_+$; monoton csökkenő, és $f(n) = a_n \searrow 0$; $n \in \mathbb{N}_+$

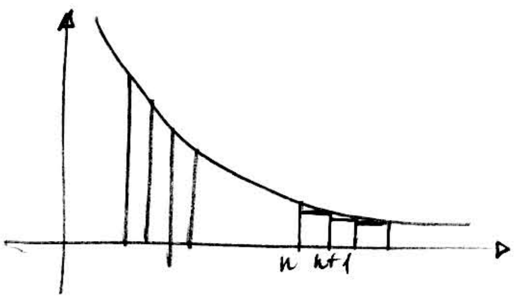
Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor, és $\int_{x=1}^{\infty} f(x)\,dx$ int. ekvikonvergensek.

Köv.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$; ha $\alpha > 1$, mert $\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} < \infty$; ha $\alpha > 1$; ...

Hibabecslés integrállal

$a_n > 0$; $f(n) = a_n$; $f(x) \downarrow$

$$\underline{\underline{H}} = |S - S_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \underline{\underline{\int_{x=n}^{\infty} f(x)\,dx}}$$



Integrálkritérium

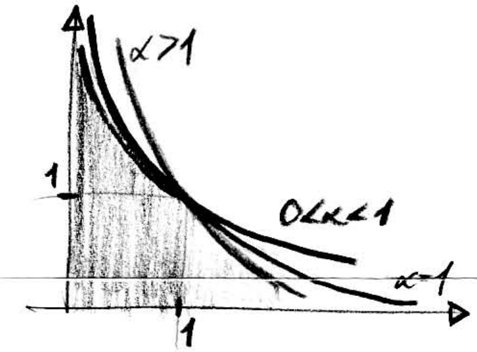
Legyen $f:[1;\infty)\to\mathbb{R}_+$ monoton csökkenő és $f(n)=a_n>0$.

Ekkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor, és $\int\limits_{x=1}^{\infty} f(x)\,dx$ integrál ekvikonvergensek.

Emlék: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, ha $\alpha>1$; [impropius integrál...]

$\frac{1}{n^\alpha}\searrow 0$, esetén: $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $f(n)=\frac{1}{n^\alpha}$; integrálkritérium ($\alpha>0$):

$$\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^A x^{-\alpha}\,dx=\lim_{A\to\infty}\begin{cases}\left[\ln x\right]_1^A, \text{ ha } \alpha=1;\ \lim\limits_{A\to\infty}(\ln A-\ln 1)=+\infty \text{ (harmonikus sor)}\\ \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^A, \text{ ha } \alpha\neq 1:\ \lim\limits_{A\to\infty}\left[\frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1}{1-\alpha}\right]=*\end{cases}$$



$$*\begin{cases}\underbrace{\frac{1}{A^{\alpha-1}(1-\alpha)}}_{\to 0}-\frac{1}{1-\alpha}, \text{ ha } \alpha>1 \Rightarrow \text{konv.}\\ \underbrace{\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha}}_{\to\infty}-\frac{1}{1-\alpha} \text{ divergál, ha } \alpha<1\ (\alpha>0)\end{cases}$$

↳ $\forall\alpha>1$-re konvergens ✓, egyébként divergens

$$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\,dx=\begin{cases}\alpha=1 \text{ esetén: } \lim\limits_{\delta\to 0+0}\left[\ln x\right]_\delta^1=\lim\limits_{\delta\to 0+0}(0-\ln\delta)=\infty \Rightarrow \nexists\\ \alpha\neq 1 \text{ esetén } (\alpha>0): \lim\limits_{\delta\to 0+0}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\delta^1=\lim\limits_{\delta\to 0+0}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=**\end{cases}$$

$$**\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}<\infty \text{ (konvergens)}, \text{ ha } 1-\alpha>0;\ 1>\alpha; \text{ azaz } \alpha\in(0;1)\\ \infty, \text{ ha } \alpha>1\end{cases}$$

↳ $\nexists\int_0^\infty\frac{1}{x^\alpha}\,dx=\infty$

K.K.

Számsorozatok nagyságrendje

D.: $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ („nagy ordó b_n"), ha $\exists c_1 > 0$: $|a_n| \leq c_1 |b_n|$, $n > N_0$ (m.m. n-re)

D.: $a_n = \Omega(b_n)$ („nagy omega b_n"), ha $b_n = \mathcal{O}(a_n)$

D.: $a_n = \Theta(b_n)$ („nagy téta b_n"), ha $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ és $a_n = \Omega(b_n)$.

Műveletek Θ-val

T.: $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \Theta(c_n) \\ b_n = \Theta(d_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1.\ a_n \cdot b_n = \Theta(c_n \cdot d_n) \\ 2.\ \dfrac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\dfrac{c_n}{d_n}\right) \\ 3.\ a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n) \end{array}\right.$$

Asszimptotikus egyenlőség

D.: $a_n \sim b_n$, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

Stirling-formula

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

T.: $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \sim c_n \\ b_n \sim d_n \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1.\ a_n + b_n \sim c_n + d_n \\ 2.\ a_n b_n \sim c_n d_n \\ 3.\ \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{c_n} \\ 4.\ \dfrac{b_n}{a_n} \sim \dfrac{d_n}{c_n} \end{array}\right.$$

T.: $a_n, b_n > 0$; $a_n \sim b_n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}$

T.: $a_n, b_n > 0$; $a_n \sim b_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ekvikonvergens, ill. divergens.

(Jelben: $\sum^{\infty} a_n \sim \sum^{\infty} b_n$)