

# A kék tollal írt brainstorming helyességét nem ellenőriztem!

$(-g x^{-4})' = (-1)(-g) \cdot x^{-5}$   
 $(x^2)' = 2x$   
 $(\frac{x^3}{3})' = \frac{3x^2}{3}$   
 $(\frac{x^3}{27})' = \frac{3x^2}{27}$

## Vizsgazárthelyi A2 2012. június 14.

1. Legyen  $L$  lineáris tér egy bázisa:  $e = (e_1, e_2, e_3)$ . Legyen  $A \in \mathcal{L}(L \rightarrow L)$  az a lineáris transzformáció melyre  $Ae_1 = e_1 - e_2 - e_3$ ,  $Ae_2 = 2e_1 - e_2 - 2e_3$ ,  $Ae_3 = 2e_1 + e_2 - 2e_3$ . Legyen továbbá  $a = e_1 - 2e_2 + 2e_3$  és  $b = -2e_1 + 2e_3$ . Állapítsa meg, hogy  $a$  ill.  $b$  eleme-e  $A$  képterének, azaz van-e olyan  $x, y \in L$ , hogy  $Ax = a$  ill.  $Ay = b$ , és ha vannak ilyenek, adja meg azokat.

2. Legyen  $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Határozza meg  $\underline{A}^{100}$  sajátértékeit!

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$   
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$   
 $\dots$   
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} n & n \\ n & n \end{pmatrix}$

3. Legyen  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$  az origón kívül és  $f(0, 0) = 0$ . Létezik-e, és ha igen, mekkora az  $f$  függvény  $v = (3, 4)$  irányú iránymenti deriváltja az origóban?

4. Legyen  $T$  az  $y = \frac{x}{3}$ ,  $y = 3x$ ,  $y = \frac{3}{x}$  egyenletű görbék  $x > 0$  szakaszai által határolt síkidom.

$\iint_T y \, dy \, dx = ?$

5. Határozza meg az  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n^2}$  függvény értelmezési tartományát és 100. deriváltjának origóbeli értékét (ha ez létezik)!

$(x^6)' = \frac{x^7}{5}$   
 $(x^{n^2})' = n^2 \cdot x^{n^2-1}$

6.

(a) Igaz-e egy tetszőleges  $n \times n$ -es mátrix

- (a1) pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem negatív,  $H \neq 0$
- (a2) pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa pozitív,  $H > 0$

(b) Legyen  $f$  mindenütt értelmezett kétváltozós függvény és  $a \in \mathbb{R}^2$  tetszőleges. Igaz-e, hogy

- (b1) ha van egy olyan  $a$ -n átmenő egyenes, melynek mentén  $f$  nem folytonos, akkor  $f$ -nek nem létezik határértéke  $a$ -ban,
- (b2) ha  $f$  nem folytonos  $a$ -ban, akkor van két  $a$ -n átmenő egyenes, melyek mentén  $f$  határértéke  $a$ -ban különböző.  $\neq I$

(c) Igaz-e, hogy

- (c1) ha  $a_n \rightarrow 0$ , akkor a  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergens,  $H$  Leibniz sor?
- (c2) ha a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  numerikus sor konvergens, akkor a  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  is konvergens.  $H$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$