Villamosmérnök A2 (2017 tavasz) — 1. szigorlat ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Az integrálások sorrendjének felcserélésével számítsa ki az $\int_0^{\pi/2}\int_y^{\pi/2} \frac{y \sin x}{x}\, dx\, dy$ integrált!

Megoldás. $\int_0^{\pi/2}\int_y^{\pi/2} \frac{y \sin x}{x}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{x} \frac{y \sin x}{x}\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}x \sin x\, dx = \frac{1}{2}(-x\cos x + \sin x)\big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$.

2. Számítsa ki $\int_0^1 \sin x^2\, dx$ értékét 1/1000 pontossággal!

Megoldás. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ mindenütt konvergens hatványsor, ezért $\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$ is, tehát tagonként integrálható: $\int_0^1 \sin x^2\, dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(4n+3)}$ Leibniz-sor, tehát $\frac{1}{(2\cdot 2+1)!(4\cdot 2+3)} < \frac{1}{1000}$ miatt $\sum_{n=0}^{1}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(4n+3)} = \frac{13}{42}$ már 1/1000-nél pontosabb közelítés.

3. Adja meg (a) a

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ -x - 2y + az &= b \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásainak számát az a és b paraméterek függvényében és (b) az összes megoldást ha a és b olyanok, hogy végtelen sok megoldás van!

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & a+1 & b+2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & a+1 & b+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & b-1 \end{array}\right),$$

következésképp 0 megoldás van, ha $a = 2$, $b \neq 1$, ∞ sok megoldás van, ha $a = 2$, $b = 1$, és egy megoldás van, ha $a \neq 2$.

Az összes megoldás, ha $a = 2$, $b = 1$: az egyenletrendszer kibővített mátrixa $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$-ra redukálódott, tehát a megoldások $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, azaz $x = 1$, $y = -1 + c$, $z = c$.

4. Legyen $e = \{e_1, e_2\}$ $\mathbb{R}^2$ szokásos bázisa, $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = 2e_1$, A a sík origó körüli, $\pi/2$ szöggel való elforgatása. (a) Írja fel $\underline{\underline{A}}_e$-t, azaz A mátrixát az e bázisban! (b) Írja fel az e-ről az f bázisba való áttérés $\underline{\underline{I}}_{ef}$ mátrixát! (c) Számítsa ki ezekből $\underline{\underline{A}}_f$-et ($A$ mátrixát az f bázisban)!

Megoldás. $\underline{\underline{A}}_e$ oszlopai az e báziselemeinek képei e-ben felírva, azaz $\underline{\underline{A}}_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(b) $\underline{\underline{I}}_{ef} = \underline{\underline{I}}_{fe}^{-1}$, ahol $\underline{\underline{I}}_{fe} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

vagyis $\underline{\underline{I}}_{ef} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(c) $\underline{\underline{A}}_f = \underline{\underline{I}}_{ef}\underline{\underline{A}}_e\underline{\underline{I}}_{fe} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Igazak-e a következő állítások ? (a) Ha $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is.
(b) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.
(c) Ha az $\underline{\underline{A}}$ $n\times n$-es mátrix oszlopai közt van olyan, ami a többi oszloptól lineárisan független, akkor $\underline{\underline{A}}$ invertálható.
(d) Ha $A : V \to V$ lineáris transzformáció, akkor $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} A^2$.
(e) Ha $A : V \to V$ lineáris transzformáció, akkor $\operatorname{Ker} A^2 \subseteq \operatorname{Ker} A$.
(f) Ha $\{x, y, z\}$ független vektorrendszer, akkor $\{x, 2y, 3z\}$ is az.

Megoldás. (a) Nem, pl. $a_n = (-1)^n/n$.
(b) Nem, pl. $a_n = 1/n$.
(c) Nem, az invertálhatósághoz az kell, hogy minden oszlop ilyen legyen. Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ nem invertálható (ez abból is látszik, hogy a determinánsa 0), noha a 3. oszlopa független az első kettőtől.
(d) Igen: $x \in \operatorname{Ker} A \implies Ax = 0 \implies A^2x = 0 \implies x \in \operatorname{Ker} A^2$.
(e) Nem: pl. ha B a síkban a $\pi/2$ szöggel való elforgatás, C pedig az x tengelyre való vetítés és $A = CB$, akkor $Aj = -i$, de $A^2 j = 0$.
(f) Igen: ha $0 = c_1x + c_2 2y + c_3 3z$, úgy, hogy c_1, c_2, c_3 nem mindegyike 0, akkor c_1, $2c_2$, $3c_3$ sem mind 0, tehát a nullvektor $\{x, y, z\}$ egy nemtriviális lineáris kombinációjaként is előáll, ellentmondva $\{x, y, z\}$ függetlenségének.

IMSc-feladat. (a) Létezik-e olyan $\underline{\underline{X}}$ $n\times n$-es mátrix, amelyre igaz, hogy minden invertálható $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrixra $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$?
(b) Szimmetrikus egy $A : V \to V$ lineáris transzformáció, ha $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ minden x, $y \in V$-re ($\langle x, y\rangle$ x és y skaláris szorzatát jelöli). Igaz-e, hogy ha A szimmetrikus lineáris transzformáció, akkor $\operatorname{Ker} A^2 \subseteq \operatorname{Ker} A$?

Megoldás. (a) Nem, mert akkor (balról $\underline{\underline{A}}^{-1}$-el szorozva) $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-2}$-t kapnánk, amiből az következne, hogy minden invertálható mátrix inverzének ugyanaz a négyzete. Ez pedig nem igaz, pl. legyen $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ a síkban az origó körüli $\pi/4$ ill. $\pi/2$ szöggel való elforgatás mátrixa; akkor $\underline{\underline{A}}^{-2}$ a $-\pi/2$-el való elforgatás, $\underline{\underline{B}}^{-2}$ pedig az origóra való tükrözés mátrixa, és ezek persze különböznek.

(b) Igen: ha $x \in \operatorname{Ker} A^2$, akkor $0 = \langle A^2x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \iff Ax = 0$.